提要 319：以複數觀念解析一元 n 次方程式的根

範例一
試解出一元四次方程式 $\omega^4+16=0$ 的根。

【解答】

本題之解析可採用複變分析的觀念。若將符號 ω^4 視為符號 z，則問題可改寫為：

$$z+16=0$$

再引用複數平面之極座標表示法，則：

$$z=-16=16e^{i(\pi+2n\pi)} \text{、} n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

因為 $z=\omega^4$，所以 $\omega=z^{1/4}$，故：

$$\omega=\left[16e^{i(\pi+2n\pi)}\right]^{\frac{1}{4}}=2e^{i\frac{\pi+2n\pi}{4}}$$

■ 當 $n=0$ 時

$$\omega=2e^{i\frac{\pi}{4}}=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

■ 當 $n=1$ 時

$$\omega=2e^{i\frac{3\pi}{4}}=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

■ 當 $n=2$ 時

$$\omega=2e^{i\frac{5\pi}{4}}=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

■ 當 $n = 3$ 時

$$\omega = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

當 n = 4、5、6、7 時，其結果與 n = 0、1、2、3 之結果相同，其他情況亦完全相同。故以上討論結果已推導出問題之解。