提要 318：複變函數之微分法則

複變函數之微分定義
複變函數之微分定義與實數函數之微分定義完全一樣，如以下所示： 若 $f(z)$ 在點 z_0 可微分，則 $f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 。

【附註】

1. 若 $\Delta z = z - z_0$ ，則 $f(z)$ 在點 z_0 可微分之定義可改寫為：

$$\boxed{f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}$$

2. 因 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ，所以 $\Delta z \to 0$，亦隱含 $\Delta x \to 0$ 、 $\Delta y \to 0$，且其所取極限的順序並不會影響問題之結果。亦即：

$$\boxed{f'(z_0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0}}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}}$$

3. $(cf)'=cf'$
4. $(f+g)'=f'+g'$
5. $(fg)'=f'g+fg'$
6. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

範例一
試求 $f(z)=z^2$ 之微分。

【解答】

實數函數如何微分，複數函數也就如何微分。所以：

$$\boxed{f'(z)=\frac{d(z^2)}{dz}=2z}$$

範例二
試說明 $f(z)=\bar{z}$ 不可微分。

【說明】

已知 $f(z)=\bar{z}=x-iy$，由函數在點 z_0 可微分之定義知：

$$f'(z_0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

所以：

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\overline{(z+\Delta z)}-\bar{z}}{\Delta z}\\&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\overline{(x+iy+\Delta x+i\Delta y)}-\overline{(x+iy)}}{\Delta x+i\Delta y}\\&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(x-iy+\Delta x-i\Delta y)-(x-iy)}{\Delta x+i\Delta y}\\&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}\end{aligned}$$

上式若先考慮 $\Delta x\to 0$，再考慮 $\Delta y\to 0$，則其極限值為-1；但上式若先考慮 $\Delta y\to 0$，再考慮 $\Delta x\to 0$，則其極限值為 1。因兩種極限之結果不一致，故 $\bar{z}$ 不可微分。