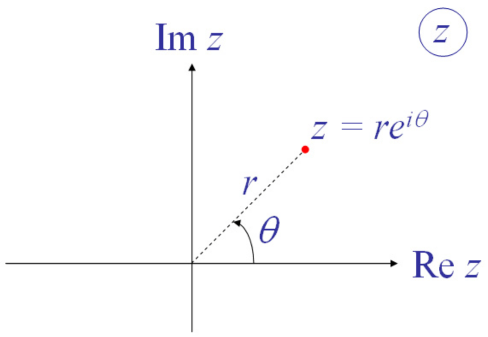
提要 311：如何以複數表示一個圓的曲線？

圓曲線的複數表示法
試說明圓心在 z_0、半徑為 r 的圓曲線的複數表示法為： 1. $z-z_0=re^{i\theta}$、$0\le\theta<2\pi$。 2. $\lvert z-z_0\rvert=r$。

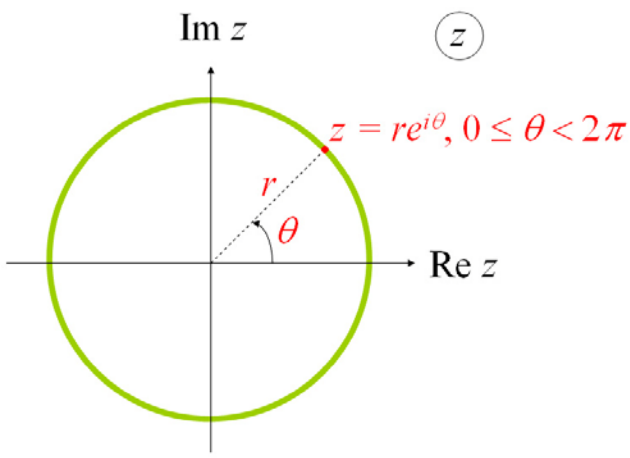
【說明】

由之前的討論知複數 $z=x+iy$ 之極座標表示法為 $z=re^{i\theta}$，如圖一所示：



圖一　複數平面上之任意點 z 的極座標表示方式

式中 r 稱為 z 之大小（Magnitude 或 Absolute Value 或 Modulus），θ 稱為 z 之幅角（Argument）。只要讓幅角 θ 由角度 0 移動至角度 2π，即可構成一個半徑為 r 的圓，其圓心是落在座標原點上，如圖二所示。



圖二　將圖一中之幅角 θ 由角度 0 移動至角度 2π，即可構成一個半徑為 r 的圓

亦即由圖二知式(1)表圓心在座標原點、半徑為 r 的圓：

$$\boxed{z = re^{i\theta} \text{ 、 } 0 \le \theta < 2\pi} \qquad (1)$$

上式取絕對值，則式(1’)亦表一圓心在座標原點、半徑為 r 的圓：

$$\boxed{|z| = |re^{i\theta}| = r|e^{i\theta}| = r|\cos\theta + i\sin\theta| = r\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = r} \qquad (1')$$

另外，若將圓心由座標原點移動至任意位置 z_0 ，則只需引用座標平移的概念，將式(1)改寫為：

$$\boxed{z - z_0 = re^{i\theta} \text{ 、 } 0 \le \theta < 2\pi} \qquad (2)$$

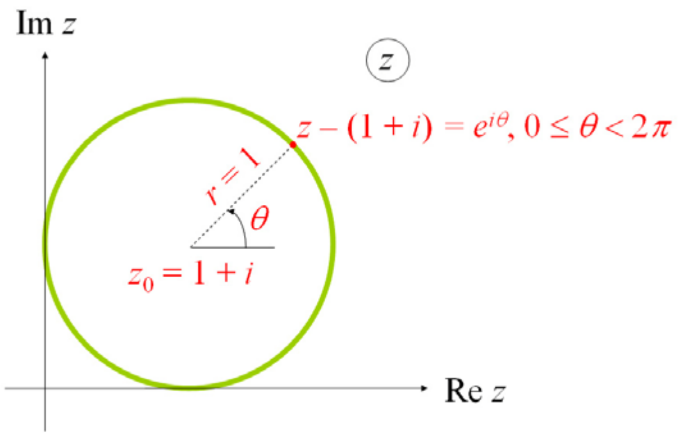
同理，上式取絕對值，則式(2’)亦表一圓心在任意位置 z_0 、半徑為 r 的圓：

$$\boxed{|z - z_0| = |re^{i\theta}| = r|e^{i\theta}| = r|\cos\theta + i\sin\theta| = r\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = r} \qquad (2')$$

範例一
試以複數表示圓心在$1+i$半徑為 1 的圓。

【解答】

問題所描述之圓如圖三所示：



圖三　圓心在$1+i$半徑為 1 的圓

茲引用式(2)與式(2’)，則如圖三所示之圓，其複表示方式為：

$$\boxed{z-(1+i)=e^{i\theta}\text{ 、 }0\le\theta<2\pi}$$

或

$$\boxed{|z-(1+i)|=1}$$