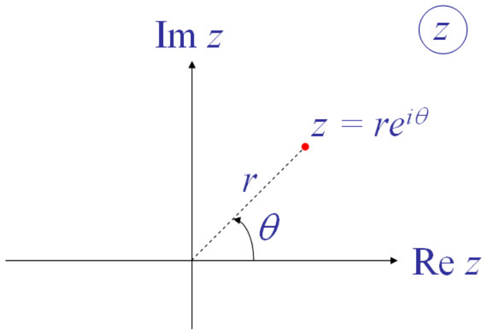
提要 310：De Moivre 公式

De Moivre 公式
試證明 De Moivre 公式 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ 是正確的。

【證明】

已知複數 $z = x + iy$ 之極座標表示法為 $z = re^{i\theta}$，如圖一所示：



圖一　複數平面上之任意點 z 的極座標表示方式

式中 r 稱為 z 之大小（Magnitude 或 Absolute Value 或 Modulus），θ 稱為 z 之幅角（Argument）。

若令 n 個 $z = re^{i\theta}$ 相乘，則：

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} \tag{1}$$

其中 $\left(re^{i\theta}\right)^n$ 可推導出 $\left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n$ 之結果；$r^n e^{in\theta}$ 可表為 $r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ 的形式。基於此，式(1)可再進一步改寫為：

$$\left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{2}$$

上式等號左右兩邊同時除以 r^n，則：

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta} \tag{3}$$

故得證。