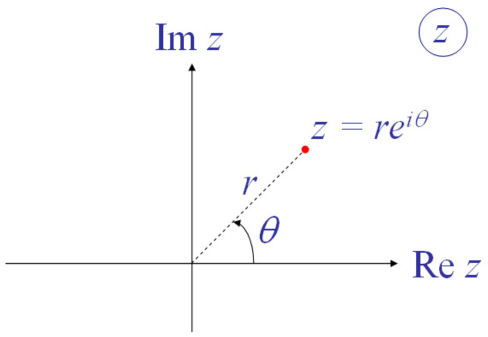
提要 309：複數相除幅角相減，複數相乘幅角相加

已知複數 $z = x + iy$ 之極座標表示法為 $z = re^{i\theta}$，如圖一所示：



圖一　複數平面上之任意點 z 的極座標表示方式

式中 r 稱為 z 之大小（Magnitude 或 Absolute Value 或 Modulus），θ 稱為 z 之幅角（Argument）。此外，$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$，$\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \arg z$，其中 arg 是幅角 argument 的簡寫。

若令 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$、$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，則：

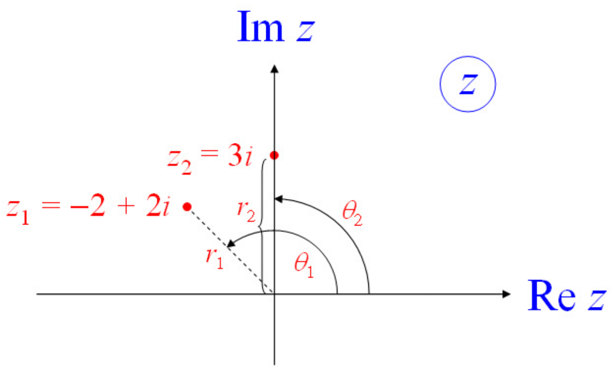
$$\boxed{z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)\left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}} \tag{1a}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}} \tag{1b}$$

由式(1a)可知，複數相乘時其幅角需相加；又由式(1b)可知，複數相除時其幅角需相減。

範例一
已知 $z_1=-2+2i$ 、 $z_2=3i$ ，試求 z_1z_2 與 z_1/z_2 。

【解答】



圖二　題意所示之兩個點在複數平面上之位置

由前面之討論知，複數之大小 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}$ ，複數之幅角 $\arg z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ ，而複數之幅角的主值 $0\le \text{Arg}\, z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}<2\pi$ 。今考慮，$z_1=-2+2i=r_1e^{i\theta_1}$ ，$z_2=3i=r_2e^{i\theta_2}$ ，則其在複數平面上所在位置如圖二所示。以下說明 r_i 、 θ_i $(i=1,2)$ 之推導方式：

■ r_1 與 θ_1 的推導

複數 z_1 之大小為 $r_1=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=2\sqrt{2}$ ；

複數 z_1 之幅角 $\theta_1=\arg z_1=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=\tan^{-1}\dfrac{2}{-2}=\dfrac{3}{4}\pi+2n\pi$ 、 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ ；

複數 z_1 之幅角的主值 $\text{Arg}\, z_1=\dfrac{3}{4}\pi$ 。

■ r_2 與 θ_2 的推導

複數 z_2 之大小為 $r_2=\sqrt{(0)^2+(3)^2}=3$ ；

複數 z_2 之幅角 $\theta_2=\arg z_2=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=\tan^{-1}\dfrac{3}{0}=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ 、 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ ；

複數 z_2 之幅角的主值 $\text{Arg}\, z_2=\dfrac{\pi}{2}$ 。

故：

$$\boxed{z_1 z_2 = \left(2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}\right)\left(3e^{i\pi/2}\right) = 6\sqrt{2}e^{i(3\pi/4+\pi/2)} = 6\sqrt{2}e^{i5\pi/4}} \tag{2a}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}}{3e^{i\pi/2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}e^{i(3\pi/4-\pi/2)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}e^{i\pi/4}} \tag{2b}$$