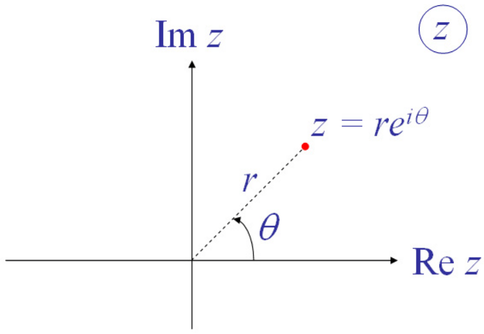
提要 308：複數之大小與幅角的主值（Principal Value）

已知複數 $z = x + iy$ 之極座標表示法為 $z = re^{i\theta}$ ，如圖一所示：



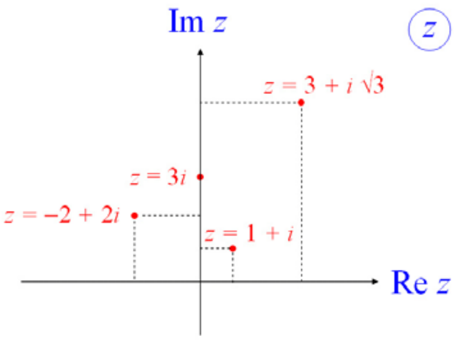
圖一　複數平面上之任意點 z 的極座標表示方式

式中 r 稱為 z 之大小（Magnitude 或 Absolute Value 或 Modulus），θ 稱為 z 之幅角（Argument）。此外，$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}}$，$\boxed{\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \arg z}$，其中 arg 是幅角 argument 的簡寫。

每一個點所對應的幅角都有無限多個，因為只要將原先所求出之角度再加上 $\pm 2\pi$ 、$\pm 4\pi$ 、$\pm 6\pi$ 、…等，即可對應到相同位置的點。若所求出之幅角係落在 $[-\pi, \pi)$ 的範圍內，則稱所推求出之幅角 θ 稱為幅角的**主值（Principal Value）**，其符號表達方式為 $\boxed{\textbf{主值}\,\theta = \mathbf{Arg}\ z}$ ，故 $-\pi \le \text{Arg}\, z < \pi$ 。但有時候，幅角的主值範圍是定義為 $[0, 2\pi)$ ，即 $0 \le \text{Arg}\, z < 2\pi$ ，兩者均可。

範例一
試求複數 $z=1+i$ 、 $z=3+3\sqrt{3}i$ 、 $z=-2+2i$ 、 $z=3i$ 之大小、幅角與幅角的主值。

【解答】



圖二　題意所示之四個點在複數平面上之位置

由前面之討論知，複數之大小 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}$ ，複數之幅角 $\arg z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ ，而複數之幅角的主值 $0\le \mathrm{Arg}\ z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}<2\pi$ 。茲令 $z_1=1+i=r_1e^{i\theta_1}$ ， $z_2=3+3\sqrt{3}i=r_2e^{i\theta_2}$ ， $z_3=-2+2i=r_3e^{i\theta_3}$ ， $z_4=3i=r_4e^{i\theta_4}$ ，則其在複數平面上所在位置如圖二所示。以下說明 r_i 、 θ_i $(i=1,2,3,4)$ 之推導方式：

■ r_1 與 θ_1 的推導

複數 z_1 之大小為 $r_1=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$ ；

複數 z_1 之幅角 $\theta_1=\arg z_1=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=\tan^{-1}\dfrac{1}{1}=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$ 、 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ ；

複數 z_1 之幅角的主值 $\mathrm{Arg}\ z_1=\dfrac{\pi}{4}$ 。

■ r_2 與 θ_2 的推導

複數 z_2 之大小為 $r_2=\sqrt{(3)^2+(3\sqrt{3})^2}=6$；

複數 z_2 之幅角 $\theta_2=\arg z_2=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=\tan^{-1}\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\pi}{3}+2n\pi$ 、 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

複數 z_2 之幅角的主值 $\operatorname{Arg} z_2=\dfrac{\pi}{3}$ 。

■ r_3 與 θ_3 的推導

複數 z_3 之大小為 $r_3=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=2\sqrt{2}$；

複數 z_3 之幅角 $\theta_3=\arg z_3=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=\tan^{-1}\dfrac{2}{-2}=\dfrac{3}{4}\pi+2n\pi$ 、 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

複數 z_3 之幅角的主值 $\operatorname{Arg} z_3=\dfrac{3}{4}\pi$ 。

■ r_4 與 θ_4 的推導

複數 z_4 之大小為 $r_4=\sqrt{(0)^2+(3)^2}=3$；

複數 z_4 之幅角 $\theta_4=\arg z_4=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=\tan^{-1}\dfrac{3}{0}=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ 、 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

複數 z_4 之幅角的主值 $\operatorname{Arg} z_4=\dfrac{\pi}{2}$ 。