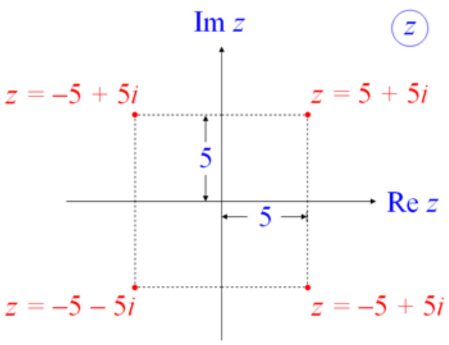
提要 307：複數之極座標表示法的應用

已知複數 $z = x + iy$ 之極座標表示法為 $z = re^{i\theta}$，本單元將應用以解釋其應用方式。

範例一
試將複數 $z = 5 + 5i$ 、 $z = -5 + 5i$ 、 $z = -5 - 5i$ 、 $z = 5 - 5i$ 以極座標方式加以表示。

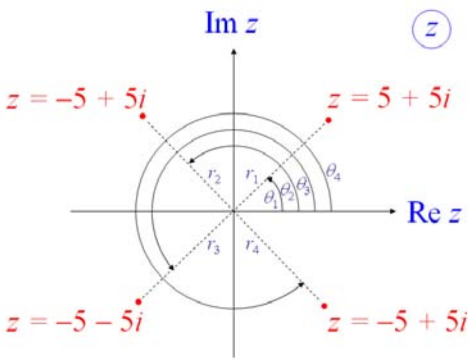
【解答】

茲將題意所示之四個點點繪在複數平面上，如圖一所示：



圖一　題意所示之四個點在複數平面上之位置

已知複數 $z = x + iy$ 之極座標表示法為 $z = re^{i\theta}$，如圖二所示：



圖二　以極座標表示法 $z = re^{i\theta}$ 表示複數平面上之四個點

■ r_1 與 θ_1 的推導

$$r_1=\sqrt{(5)^2+(5)^2}=5\sqrt{2}\text{，}\theta_1=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}\frac{5}{5}=\frac{1}{4}\pi\text{。}$$

■ r_2 與 θ_2 的推導

$$r_2=\sqrt{(-5)^2+(5)^2}=5\sqrt{2}\text{，}\theta_2=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}\frac{5}{-5}=\frac{3}{4}\pi\text{。}$$

■ r_3 與 θ_3 的推導

$$r_3=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}\text{，}\theta_3=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}\frac{-5}{-5}=\frac{5}{4}\pi\text{。}$$

■ r_4 與 θ_4 的推導

$$r_4=\sqrt{(5)^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}\text{，}\theta_4=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}\frac{-5}{5}=\frac{7}{4}\pi\text{。}$$

在推求幅角（Argument）θ時，最好是能有複數平面上之『圖的概念』，否則很難快速找到答案。

其實每一個點所對應的幅角都有無限多個，因為只要將原先所求出之角度再加上 $\pm 2\pi$、$\pm 4\pi$、$\pm 6\pi$、…等，即可對應到相同位置的點。

若所求出之幅角係落在 $[0,2\pi)$ 的範圍內，則稱所推求出之幅角為幅角的**主值（Principal Value）**。但有時候，幅角的主值範圍是定義為 $[-\pi,\pi)$，兩者均可。基於此，可知：

- ■ $z=5+5i=5\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+2n\pi)}$，$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$，其幅角的主值 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$。
- ■ $z=-5+5i=5\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4}+2n\pi)}$，$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$，其幅角的主值 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$。
- ■ $z=5+5i=5\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4}+2n\pi)}$，$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$，其幅角的主值 $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$。
- ■ $z=5+5i=5\sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{4}+2n\pi)}$，$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$，其幅角的主值 $\theta=\dfrac{7\pi}{4}$。