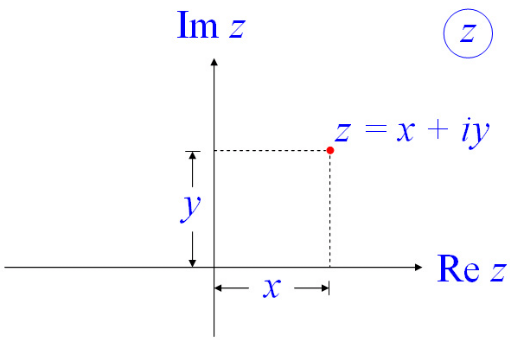
提要 306：複數之極座標表示法

複數（Complex Number）$z = x + iy$ 之**極座標（Polar Coordinate）**表示法 $z = re^{i\theta}$ 相當重要，其原因至少兩個：(1) $z^n = (x+iy)^n$ 的運算很難，但 $z^n = (re^{i\theta})^n$ 卻很容易。(2) 以複數之極座標表示方式表達圓心在 z_0 的圓較容易：$z - z_0 = Re^{i\theta}$、$0 \le \theta < 2\pi$。以下證明複數 $z = x + iy$ 之極座標表示法確為 $z = re^{i\theta}$。

複數之極座標表示法
試證明複數 $z = x + iy$ 之極座標表示法為 $z = re^{i\theta}$。

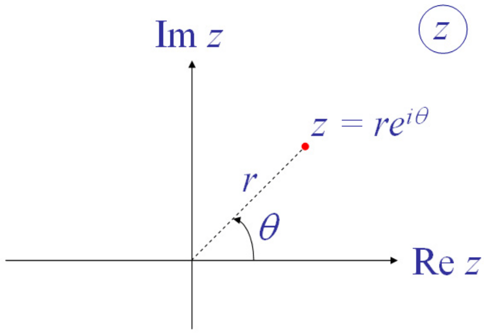
【證明】

已知複數平面上之任意點 z 的表示方式如圖一所示：



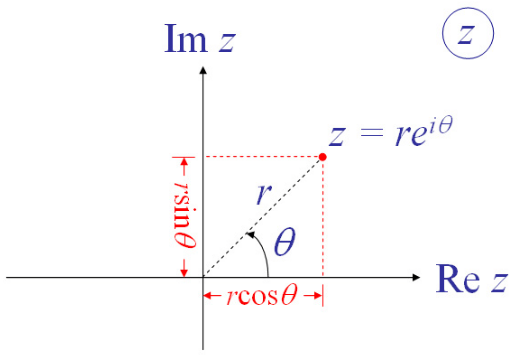
圖一　複數平面上之任意點 z 的表示方式

另外，吾人可以另一方式描述同一個點 z，亦即以兩個新的獨立變數 r、θ 取代舊的兩個獨立變數 x、y，如圖二所示：



圖二　複數平面上之任意點 z 的極座標表示方式

由圖二知，其水平分量暨垂直分量可分別表為 $r\cos\theta$ 、 $r\sin\theta$ ，如圖三所示：



圖三　複數平面上之任意點 z 的水平分量與垂直分量表示方式

比較圖一與圖三可知：

$$x = r\cos\theta \text{ 、 } y = r\sin\theta \tag{1}$$

因 $z = x + iy$ ，故：

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{2}$$

已知尤拉公式（Euler Formula）為：

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{3}$$

茲引用尤拉公式，故式(2)所示複數平面上之點可改寫為：

$$\boxed{z = re^{i\theta}} \tag{4}$$

故得證。

【附註】

1. r稱為z之大小（Magnitude 或 Absolute Value），θ稱為z之幅角（Argument）。
2. $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$。