

提要 305：共軛複數 (Complex Conjugate)

複數 (Complex Number) $z = x + iy$ 之 **共軛複數 (Complex Conjugate)** 係定義為：

$$\bar{z} = x - iy \quad (1)$$

利用複數 z 與共軛複數 \bar{z} ，可推導出複數之實部 (Real Part) x 與虛部 (Imaginary Part) y ，如以下所示：

$$\operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad (2a)$$

$$\operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad (2b)$$

【附註】

與共軛複數相關之基本運算尚有許多，整理如下：

$$\bullet \overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\bullet \overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\bullet \overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\bullet \overline{(z_1 / z_2)} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$$

若令 $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ，則：

$$\bullet \overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$$

$$\bullet f(\bar{z}) = f(x - iy) = u(x, -y) + iv(x, -y)$$

$$\bullet \bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y)$$

以上關係式中之最後一個似較難記住，讀者應留意其運算規則。

範例一

令 $z_1 = 4 - 3i$ 、 $z_2 = 2 - 5i$ ，試推求出 $\text{Im } z_1$ 、 $\overline{(z_1 z_2)}$ 、 $\bar{z}_1 \bar{z}_2$ 。

【解答】

$$\text{Im } z_1 = \text{Im}\{4 - 3i\} = -3$$

$$\overline{(z_1 z_2)} = \overline{[(4 - 3i)(2 - 5i)]} = \overline{(8 - 20i - 6i + 15i^2)} = \overline{(8 - 26i - 15)} = \overline{(-7 - 26i)} = -7 + 26i$$

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{(4 - 3i)(2 - 5i)} = (4 + 3i)(2 + 5i) = 8 + 20i + 6i + 15i^2 = 8 + 26i - 15 = -7 + 26i$$