

提要 303：複數之加減乘除等基本運算

以下針對**複數 (Complex Number)** 之加減乘除的基本運算規則加以說明。

■ 複數之相加

把握實部與實部相加、虛部與虛部相加的原則。令 $z_1 = x_1 + iy_1$ 、 $z_2 = x_2 + iy_2$ ，則：

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (1)$$

或令 $z_1 = (x_1, y_1)$ 、 $z_2 = (x_2, y_2)$ ，則

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (1')$$

■ 複數之相乘

需把握逐項相乘的原則。令 $z_1 = x_1 + iy_1$ 、 $z_2 = x_2 + iy_2$ ，則其相乘積為：

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + (iy_1)(iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)之計算過程有引用 $i^2 = -1$ 的基本觀念，因為 $i = \sqrt{-1}$ 。

■ 複數之相減

要把握實部與實部相減、虛部與虛部相減的原則。令 $z_1 = x_1 + iy_1$ 、 $z_2 = x_2 + iy_2$ ，則：

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (3)$$

或令 $z_1 = (x_1, y_1)$ 、 $z_2 = (x_2, y_2)$ ，則

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \quad (3')$$

■ 複數之相除

需把握逐項相除的原則，最好還能將分母有理化。令 $z_1 = x_1 + iy_1$ 、 $z_2 = x_2 + iy_2$ ，則其相除之基本運算規則為：

$$\begin{aligned} z_1/z_2 &= (x_1 + iy_1)/(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)/(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2) \\ &= [(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)]/(x_2^2 - i^2y_2^2) \\ &= [(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)]/(x_2^2 + y_2^2) \end{aligned} \quad (4)$$

上式之實部為 $(x_1x_2 + y_1y_2)/(x_2^2 + y_2^2)$ ，虛部為 $(x_2y_1 - x_1y_2)/(x_2^2 + y_2^2)$ 。以上所作說明應不難理解才對。