習題演習
偏微分方程式

習題演習：偏微分方程式

■ 一階非線性偏微分方程式

【習題 1】

Solve the partial differential equation $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-1$.

【參考解答】通解爲$\phi\left(\frac{y}{x},\frac{z-1}{x}\right)=0$

■ 常係數n階齊次偏微分方程式

【習題 1】

Solve the partial differential equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{x+y}$.

【參考解答】 $z=\phi_1(y+x)+\phi_2(y+2x)-xe^{y+x}$

【習題 3】

求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{3x}+x^2y$之通解。

【參考解答】 $z=\phi_1(y)+\phi_2(y+x)+\frac{1}{9}e^{3x}+\frac{1}{12}x^4y+\frac{1}{60}x^5$

■ 二階線性偏微分方程式

【習題 1】

求$u_{xy}=e^x+\cos y$之解。

【參考解答】$u=e^xy+x\sin y+\phi_1(x)+\phi_2(y),\frac{d}{dx}\phi_1(x)=\varphi(x)$其中$\phi_1(x)$及$\phi_2(y)$爲任意可微分函數

【習題 2】

解$u_{yy}-2xu_{y}+x^{2}u=(x-2)^{2}e^{3x+2y}$ 。

【參考解答】$u=e^{xy}\phi_1(x)+xe^{xy}\phi_2(x)+e^{3x+2y}$

【習題 3】

請寫出偏微分方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$的特徵方程式。並請指出此方程式是屬於哪一種類型(例如拋物型，等等)。請分$x>0$和$x<0$兩種情況討論。【93 中央土研所結構組大地組】

【參考解答】(1)特徵方程式為$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+x=0$, (2) $x>0$時$\Rightarrow B^2-4AC<0$，屬橢圓形，$x<0$時$\Rightarrow B^2-4AC>0$，屬雙曲線型。

■ 直角坐標的拉普拉斯方程式

【習題 1】

請利用分離變數法求得下列問題之 steady-state solution，u：控制方程式$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$x>0$，$t>0$。【91 交大土研所結構組】

【參考解答】$\phi(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi\left[1+(n\pi)^2\right]}\sin y\sin n\pi x$

■ 柱座標的拉普拉斯方程式

【習題 1】

Solve the following initial value problem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial r}=2\cos\theta$ for $r=2$, $f=3\cos\theta$ as $r\to\infty$ for the function $f(r,\theta)$ defined in the region $2\le r<\infty$, $0\le\theta<2\pi$ of a plane, for which (r,θ) is the polar coordinates. 【92 台大土研所】

【參考解答】 $f(r,\theta)=3r\cos\theta+\dfrac{4}{r}\cos\theta$

■ 直角坐標的熱導方程式

【習題 1】

有一偏微分方程式如下所示 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ，其中 $0\le z\le 2H$ ， $t\ge 0$ ， a 爲常係數。應用變數分離法及已知邊界條件求得其解爲 $u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\dfrac{n\pi x}{2H}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2a^2t}{4H^2}\right)$，其中 exp 代表指數函數。試根據初始條件 $u(z,0)=u_0$ ，求待定係數 $A_n=?$【92 台科大大地組(15%)】

【參考解答】 $A_n=\dfrac{2u_0}{n\pi}(1-\cos n\pi)$

■ 直角坐標的波動方程式

【習題 1】

波方程 $u_{xx}+u_{yy}=u_{tt}$ 的解滿足以下條件

B.C.: $u(0,y,t)=0$, $u(1,y,t)=0$, $u(x,0,t)=0$, $u(x,1,t)=0$,

I.C.: $u(x,y,0)=0$, $u(x,y,0)=g(x.y)$,

設 $g(x.y)$ 爲已知函數，而此解可以表示成

$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}D_{mn}\sin(m\pi x)\sin(n\pi y)\sin(K_{mn}t)$，請找出 D_{mn} 和 K_{mn} 的數學表達式。【91 中央土研所結構組大地組(20%)】

【參考解答】 $D_{mn}=\dfrac{4}{k_{mn}}\int_0^1\int_0^1 g(x,y)\sin m\pi x\sin n\pi y\,dxdy$ ， $k_{mn}=\sqrt{m^2\pi^2+n^2\pi^2}$

【習題 2】

The displacement $u(x,t)$ of a semi-infinite is governed by the following partial differential equation $c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t}$, $x>0$, $t>0$, where c is a constant. With the initial conditions $u(x,0)=0$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$ and the excitation $f(t)$ at one end of string, that is, $u(0,t)=f(t)$ then, what is the solution of $u(x,t)$?【91 成大土研所大地組材料組】

【參考解答】$u(x,t)=f\left(t-\frac{x}{c}\right),\ t>\frac{x}{c}$ or $0,\ t<\frac{x}{c}$

■ 波動方程式的蓋達伯特解

【習題 1】

以 D'Alembert 解 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$-\infty<x<\infty$，$0\le t<\infty$，$u(x,0)=f(x)$，$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$。

【參考解答】$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(z)dz$