提要 297：一個函數的 Jacobian 問題

一個函數的 Jacobian 問題
已知 $f(x,y,z)=C$，試推求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解答：

首先對 $f(x,y,z)=C$ 作全微分(Total Differential)之運算，亦即：

$$df(x,y,z)=dC \tag{1}$$

上式可改寫為：

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0 \tag{2}$$

由式(2)可推求出：

$$dz=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}dx-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}dy \tag{3}$$

為輕便起見，各項微分式亦可分別表為 $\frac{\partial f}{\partial x}=f_x$、$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y$、$\frac{\partial f}{\partial z}=f_z$，故式(3)亦可表為：

$$dz=-\frac{f_x}{f_z}dx-\frac{f_y}{f_z}dy \tag{3'}$$

式(3')分別對變數 x、y 作微分之運算，則：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z}\frac{dx}{dx}-\frac{f_y}{f_z}\frac{dy}{dx} \tag{4a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_x}{f_z}\frac{dx}{dy}-\frac{f_y}{f_z}\frac{dy}{dy} \tag{4b}$$

由題意知，x、y 互為獨立變數，故 $dy/dx=0$ 且 $dx/dy=0$，另外 $dx/dx=1$、$dy/dy=1$。基於此，式(4a)與式(4b)可改寫為：

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{J\left(\frac{f}{x}\right)}{J\left(\frac{f}{z}\right)}} \tag{5a}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{J\left(\frac{f}{y}\right)}{J\left(\frac{f}{z}\right)}} \tag{5b}$$

附註：一個函數的 Jacobian 是定義為 $\boxed{J\left(\frac{F}{\alpha}\right) = \frac{\partial F}{\partial \alpha}}$。