# 提要 292：什麼是 Fourier-Bessel 級數？

在下一單元介紹如何以分離變數法解析軸對稱波傳問題前，需先介紹 Fourier-Bessel 級數的概念，以便於下一單元之應用。基本上，這種級數相關之公式是不用去背誦的，若有需要，直接查考數學使用手冊即可。

**Fourier-Bessel 級數**

若函數 $f(x)$ 可以用 Fourier-Bessel 級數加以表示：

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m J_n(k_{mn}x) \tag{1}$$

則其中之係數 $a_m=\dfrac{2}{R^2J_{n+1}^2(k_{mn}R)}\displaystyle\int_0^R xf(x)J_n(k_{mn}x)dx$。

證明：

式(1)等號左右兩邊同時乘以 $xJ_\alpha(k_{mn}x)$，再對其中之變數 $x$ 作 $[0,R]$ 的積分，如以下所示：

$$\int_0^R xf(x)J_\alpha(k_{mn}x)dx=\int_0^R\sum_{m=1}^{\infty}a_m xJ_n(k_{mn}x)J_\alpha(k_{mn}x)dx \tag{2}$$

上式中之相加的運算與積分的運算可以互相對調，故式(2)亦可表為：

$$\int_0^R xf(x)J_\alpha(k_{mn}x)dx=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\int_0^R xJ_n(k_{mn}x)J_\alpha(k_{mn}x)dx \tag{3}$$

其中

$$\boxed{\int_0^R xJ_n(k_{mn}x)J_\alpha(k_{mn}x)dx=\begin{cases}\dfrac{1}{2}R^2J_{n+1}^2(k_{mn}R), & \alpha=n\\ 0, & \alpha\neq n\end{cases}} \tag{4}$$

故式(3)又可改寫為：

$$\int_0^R xf(x)J_n^2(k_{mn}x)dx=a_m\left[\frac{1}{2}R^2J_{n+1}^2(k_{mn}R)\right] \tag{5}$$

所以：

$$\boxed{a_m = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2\left(k_{mn}R\right)}\int_0^R xf\left(x\right)J_n^2\left(k_{mn}x\right)dx} \tag{6}$$

故得證。