提要 291：應用分離變數法解析二維波傳問題

作者曾介紹一維波傳方程式的由來以及如何以分離變數法解析問題之數學模式，以下將介紹如何以分離變數法解析二維波傳問題。

二維波傳問題之數學模式

如圖 1 所示薄膜振動問題之數學模式為：

- **控制方程式**：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 【牛頓第二運動定律的化身】，其中 $u(x,y,t)$ 表薄膜上質點之位移量；係數 $c=T/\rho$ 是波傳速度，T 、ρ 分別為薄膜單位長度拉力與面積密度。

- **邊界條件**：$u(0,y,t)=0$ 【薄膜左邊為固定端】

  $u(a,y,t)=0$ 【薄膜右邊為固定端】

  $u(x,0,t)=0$ 【薄膜底邊為固定端】

  $u(x,b,t)=0$ 【薄膜上邊為固定端】

- **初始條件**：$u(x,y,0)=f(x,y)$ 【薄膜之初始形狀為 $f(x,y)$】

  $\dfrac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=g(x,y)$ 【薄膜之初始速度為 $g(x,y)$】

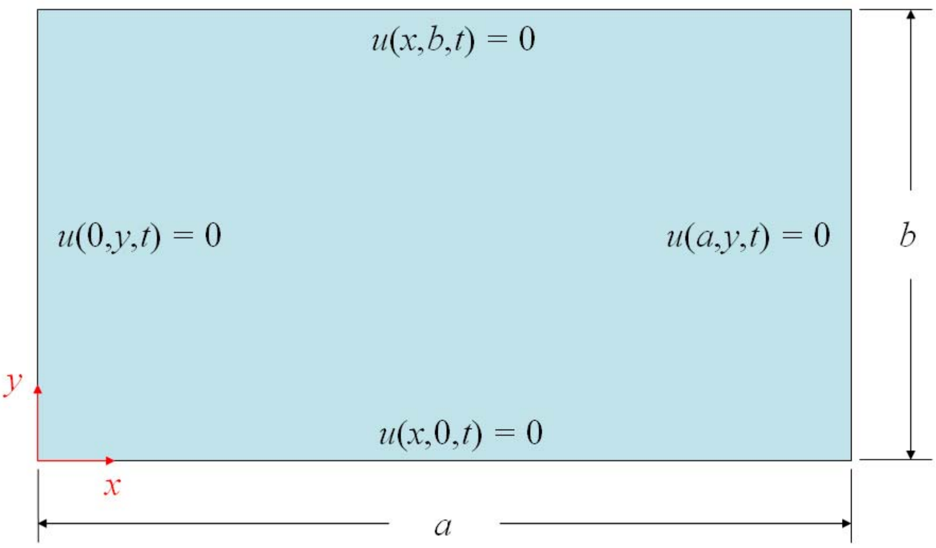

圖 1　薄膜振動問題示意圖

解答：

紅色框線部分很重要，其有助於瞭解控制方程式暨每一個條件方程式在工程上所代表的意義。茲將解析過程分為三個步驟，說明如下。

■ 步驟一　引用分離變數法

茲考慮空間變數與時間變數可分離，亦即令$u(x,y,t)=F(x,y)G(t)$，再代入控制方程式：

$$\frac{\partial^2(FG)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(FG)}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(FG)}{\partial t^2} \tag{1}$$

上式等號左邊僅需分別對x、y微分，等號右邊僅需對t微分，故上式可改寫為：

$$G\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+G\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}F\frac{d^2 G}{dt^2} \tag{2}$$

為方便起見，式(2)亦常表為：

$$GF_{xx}+GF_{yy}=\frac{1}{c^2}F\ddot{G} \tag{2'}$$

其中$F_{xx}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$、$F_{yy}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$、$\ddot{G}=\dfrac{d^2 G}{dt^2}$。式(2’)等號左右兩邊同時除以$FG$，則式(2’)可改寫為：

$$\frac{F_{xx}}{F}+\frac{F_{yy}}{F}=\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}}{G} \tag{3}$$

因上式等號左邊為與函數$F(x,y)$有關之運算，故其運算結果應與變數x、y有關；同理，上式等號右邊為與函數$G(t)$有關之運算，且波速c為常數，故其運算結果應與變數t有關。然而，一個和變數x、y有關之運算若欲與一個和變數t有關之運算相等，唯一的可能就是它們都是常數，也就是說：

$$\frac{F_{xx}}{F}+\frac{F_{yy}}{F}=\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}}{G}=\text{常數} \tag{4}$$

但是常數還是有講究的，常數可分為三類：❶零　❷正的常數　❸負的常數，其中僅第三種狀況會是合理的！另兩種狀況在之前的一維波傳問題中已有說明，故本單元暫不再討論第❶、❷種情況。基於此，式(4)可表為：

$$\frac{F_{xx}}{F}+\frac{F_{yy}}{F}=\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}}{G}=-\nu^2 \tag{5}$$

上式可拆開變成兩個微分方程式：

$$F_{xx}+F_{yy}+\nu^2 F=0 \tag{6a}$$

$$\ddot{G}+c^2\nu^2 G=0 \tag{6b}$$

再令：

$$F(x,y)=H(x)Q(y) \tag{7}$$

然後代入式(6a)：

$$(HQ)_{xx}+(HQ)_{yy}+\nu^2(HQ)=0 \tag{8}$$

上式可再調整為：

$$H''Q+HQ''+\nu^2 HQ=0 \tag{8'}$$

其中 $H''=\dfrac{d^2H}{dx^2}$ 、$Q''=\dfrac{d^2Q}{dy^2}$ 。式(8')再除以 HQ ，可得：

$$\frac{H''}{H}=-\frac{Q''}{Q}-\nu^2 \tag{8'}$$

上式等號左邊僅與變數 x 有關，等號右邊僅與變數 y 有關，若欲相等，則必定是這兩個都是常數。如前所述，這個常數還是有講究的。同理，常數可分為三類：❶零 ❷正的常數 ❸負的常數，其中僅第三種狀況會是合理的！另外兩種不合理情況下之討論，本單元暫不另闢單元說明，若讀者有興趣，請參考一維波傳問題附註中之說明。茲考慮第❸種情況如下：

$$\frac{H''}{H}=-\frac{Q''}{Q}-\nu^2=-k^2 \tag{9}$$

式(9)又可拆解為兩個常微分方程式，如以下所示：

$$H''+k^2H=0 \tag{10a}$$

$$Q''+\left(\nu^2-k^2\right)Q=0 \tag{10b}$$

解析式(6b)暨式(10a)、式(10b)，即可推求出問題之通解(General Solution)。

■ 步驟二　$u(x,y,t)$之通解的解析

式(10a)之解析

茲考慮函數$H(x)$解之型態為：

$$H(x)=e^{\lambda x} \tag{11}$$

再代回式(10a)，則式(10a)可表為：

$$\begin{aligned}&\left(e^{\lambda x}\right)''+k^2\left(e^{\lambda x}\right)=0\\ \Rightarrow&\left(\lambda^2+k^2\right)e^{\lambda x}=0\end{aligned}$$

因為$e^{\lambda x}\neq 0$，所以

$$\lambda^2+k^2=0 \tag{12}$$

上式稱之為**特徵方程式(Characteristic Equation)**。解析式(12)可得**特徵根(Characteristic Root)** $\lambda=\pm ik$，故$H(x)=e^{ikx}$與$H(x)=e^{-ikx}$均為式(10a)之解。因式(10a)為**線性且齊性之常微分方程式(Linear Homogeneous Ordinary Differential Equation)**，故可根據**重疊原理(Superposition Principle)**，將所得出之兩個$H(x)$分別乘以係數C_1、C_2，再作疊加之運算，則所得出的解仍為式(10a)之解，如以下所示：

$$H(x)=C_1e^{ikx}+C_2e^{-ikx} \tag{13}$$

上式還可根據**尤拉公式(Euler Formula)** $e^{\pm it}=\cos t\pm i\sin t$，將指數函數化簡為正弦和餘弦函數之和：

$$\begin{aligned}H(x)&=C_1(\cos kx+i\sin kx)+C_2(\cos kx-i\sin kx)\\&=(C_1+C_2)\cos kx+i(C_1-C_2)\sin kx\\&=A\cos kx+B\sin kx\end{aligned} \tag{14}$$

其中$A=C_1+C_2$、$B=i(C_1-C_2)$。

式(10b)之解析

式(10b)與式(10a)具類比之關係，只需將式(14)中之函數$H(x)$換成函數$Q(y)$，且將變數x改為變數y、常數k改寫為$\sqrt{\nu^2-k^2}$，則式(10b)之解即可推求出來：

$$Q(y)=\tilde{A}\cos\left(\sqrt{\nu^2-k^2}\,y\right)+\tilde{B}\sin\left(\sqrt{\nu^2-k^2}\,y\right) \tag{15}$$

式(6b)之解析

同理，只要將式(6a)解析過程中之自變數 x 改為自變數 t、再將常數 k 改為常數 $c\nu$，即可解出式(6b)之解。基於此，式(6b)之解可表為：

$$G(t) = A^* \cos(c\nu t) + B^* \sin(c\nu t) \tag{16}$$

因 $u(x,y,t) = H(x)Q(y)G(t)$，故：

$$u(x,y,t) = (A\cos kx + B\sin kx)(\tilde{A}\cos py + \tilde{B}\sin py)[A^* \cos(c\nu t) + B^* \sin(c\nu t)] \tag{17}$$

其中 $p = \sqrt{\nu^2 - k^2}$。

■ 步驟三　$u(x,y,t)$之特解的解析

由題意知，$u(x,y,t)$應滿足四個邊界條件及兩個初始條件，這六個條件剛好夠解式(17)中之六個獨立的未知數，說明如下。首先將$u(x,y,t)$代入條件為零的邊界條件：

$$\begin{cases} u(0,y,t) = 0 \\ u(a,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = 0 \\ u(x,b,t) = 0 \end{cases} \tag{18}$$

故

$$u(0,y,t) = (A\cos 0 + B\sin 0)(\tilde{A}\cos py + \tilde{B}\sin py)[A^* \cos(c\nu t) + B^* \sin(c\nu t)] = 0 \tag{19a}$$

$$u(a,y,t) = (A\cos ka + B\sin ka)(\tilde{A}\cos py + \tilde{B}\sin py)[A^* \cos(c\nu t) + B^* \sin(c\nu t)] = 0 \tag{19b}$$

$$u(x,0,t) = (A\cos kx + B\sin kx)(\tilde{A}\cos 0 + \tilde{B}\sin 0)[A^* \cos(c\nu t) + B^* \sin(c\nu t)] = 0 \tag{19c}$$

$$u(x,b,t) = (A\cos kx + B\sin kx)(\tilde{A}\cos pb + \tilde{B}\sin pb)[A^* \cos(c\nu t) + B^* \sin(c\nu t)] = 0 \tag{19d}$$

對式(19a)與式(19b)而言，$\tilde{A}\cos py + \tilde{B}\sin py \neq 0$ 且 $A^* \cos(c\nu t) + B^* \sin(c\nu t) \neq 0$；對式(19c)與式(19d)而言，$A\cos kx + B\sin kx \neq 0$ 且 $A^* \cos(c\nu t) + B^* \sin(c\nu t) \neq 0$。所以式(19a)至式(19d)可改寫為：

$$A\cos 0 + B\sin 0 = 0 \tag{20a}$$

$$A\cos ka + B\sin ka = 0 \tag{20b}$$

$$\tilde{A}\cos 0 + \tilde{B}\sin 0 = 0 \tag{20c}$$

$$\tilde{A}\cos pb+\tilde{B}\sin pb=0 \tag{20d}$$

由式(20a)及式(20c)知：

$$A=0\text{ 、 }\tilde{A}=0 \tag{21}$$

因 $A=0$ 、 $\tilde{A}=0$ ，故式(20b)與式(20d)可分別改寫為 $B\sin ka=0$ 、 $\tilde{B}\sin pb=0$ 。此亦屬於兩部分相乘等於零的問題，因為 B 與 $\tilde{B}$ 不能再等於零【若 $B=0$ ，則 $H(x)=0$ ，且會導致 $u(x,y,t)=0$ ；同理，若 $\tilde{B}=0$ ，則 $Q(y)=0$ ，也會導致 $u(x,y,t)=0$ 】，所以只好讓 $\sin ka=0$ 中之參數 ka 、 $\sin pb=0$ 中之參數 pb 被分別安排為式(22a)與式(22b)之型態，否則 $\sin ka=0$ 、 $\sin pb=0$ 無法成立：

$$ka=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi,\pm 4\pi,\pm 5\pi,\cdots \tag{22a}$$

$$pb=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi,\pm 4\pi,\pm 5\pi,\cdots \tag{22b}$$

亦即：

$$k=0,\pm\frac{\pi}{a},\pm\frac{2\pi}{a},\pm\frac{3\pi}{a},\pm\frac{4\pi}{a},\pm\frac{5\pi}{a},\cdots \tag{22a'}$$

$$p=0,\pm\frac{\pi}{b},\pm\frac{2\pi}{b},\pm\frac{3\pi}{b},\pm\frac{4\pi}{b},\pm\frac{5\pi}{b},\cdots \tag{22b'}$$

將式(21)與式(22a’)、式(22b’)代入式(17)，可得出以下情況之解：

❶ 當 $k=0$ 、 $p=0$ 時

$$u(x,y,t)=(B\sin 0)(\tilde{B}\sin 0)(A^*\cos 0+B^*\sin 0)=0=u_{00}$$

❷ 當 $k=\frac{\pi}{a}$ 、 $p=\frac{\pi}{b}$ 時

$$u(x,y,t)=\left(B\sin\frac{\pi x}{a}\right)\left(\tilde{B}\sin\frac{\pi y}{b}\right)\left[A^*\cos\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}\,ct\right)+B^*\sin\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}\,ct\right)\right]$$
$$=u_{11}$$

❸ 當 $k=-\frac{\pi}{a}$ 、 $p=\frac{\pi}{b}$ 時

$$u(x,y,t)=\left(B\sin\frac{-\pi x}{a}\right)\left(\tilde{B}\sin\frac{\pi y}{b}\right)\left[A^*\cos\left(\sqrt{\left(\frac{-\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}\,ct\right)+B^*\sin\left(\sqrt{\left(\frac{-\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}\,ct\right)\right]$$
$$=u_{-11}$$

❹ 當 $k=\frac{2\pi}{a}$ 、 $p=\frac{\pi}{b}$ 時

$$u(x,y,t)=\left(B\sin\frac{2\pi x}{a}\right)\left(\tilde{B}\sin\frac{\pi y}{b}\right)\left[A^*\cos\left(\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)+B^*\sin\left(\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)\right]$$

$$=u_{21}$$

❺ 當 $k=-\frac{2\pi}{a}$ 、 $p=\frac{\pi}{b}$ 時

$$u(x,y,t)=\left(B\sin\frac{-2\pi x}{a}\right)\left(\tilde{B}\sin\frac{\pi y}{b}\right)\left[A^*\cos\left(\sqrt{\left(\frac{-2\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)+B^*\sin\left(\sqrt{\left(\frac{-2\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)\right]$$

$$=u_{-21}$$

❻ 當 $k=\frac{3\pi}{a}$ 、 $p=\frac{\pi}{b}$ 時

$$u(x,y,t)=\left(B\sin\frac{3\pi x}{a}\right)\left(\tilde{B}\sin\frac{\pi y}{b}\right)\left[A^*\cos\left(\sqrt{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)+B^*\sin\left(\sqrt{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)\right]$$

$$=u_{31}$$

❼ 當 $k=-\frac{3\pi}{a}$ 、 $p=\frac{\pi}{b}$ 時

$$u(x,y,t)=\left(B\sin\frac{-3\pi x}{a}\right)\left(\tilde{B}\sin\frac{\pi y}{b}\right)\left[A^*\cos\left(\sqrt{\left(\frac{-3\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)+B^*\sin\left(\sqrt{\left(\frac{-3\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)\right]$$

$$=u_{-31}$$

因控制方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 為線齊性偏微分方程式，故以上所示之各種不同型態的 $u(x,y,t)$ 之解，又可以利用重疊原理加以疊加，組成較廣義之解的型態：

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= c_{00}u_{00} + c_{11}u_{11} + c_{-11}u_{-11} + c_{21}u_{21} + c_{-21}u_{-21} + c_{31}u_{31} + c_{-31}u_{-31} + \cdots \\
&= c_{00}(0) \\
&+ c_{11}\left\{\left(B\sin\frac{\pi x}{a}\right)\left(\tilde{B}\sin\frac{\pi y}{b}\right)\left[A^*\cos\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)+B^*\sin\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)\right]\right\} \\
&+ c_{-11}\left\{\left(-B\sin\frac{\pi x}{a}\right)\left(\tilde{B}\sin\frac{\pi y}{b}\right)\left[A^*\cos\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)+B^*\sin\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)\right]\right\} \\
&+ c_{21}\left\{\left(B\sin\frac{2\pi x}{a}\right)\left(\tilde{B}\sin\frac{\pi y}{b}\right)\left[A^*\cos\left(\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)+B^*\sin\left(\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)\right]\right\} \\
&+ c_{-21}\left\{\left(-B\sin\frac{2\pi x}{a}\right)\left(\tilde{B}\sin\frac{\pi y}{b}\right)\left[A^*\cos\left(\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)+B^*\sin\left(\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)\right]\right\} \\
&+ c_{3}\left\{\left(B\sin\frac{3\pi x}{a}\right)\left(\tilde{B}\sin\frac{\pi y}{b}\right)\left[A^*\cos\left(\sqrt{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)+B^*\sin\left(\sqrt{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)\right]\right\} \\
&+ c_{-3}\left\{\left(-B\sin\frac{3\pi x}{a}\right)\left(\tilde{B}\sin\frac{\pi y}{b}\right)\left[A^*\cos\left(\sqrt{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)+B^*\sin\left(\sqrt{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}ct\right)\right]\right\} \\
&+ \cdots
\end{aligned}
\tag{23}
$$

若考慮 $E_{11}=c_{11}B\tilde{B}A^*-c_{-11}B\tilde{B}A^*$、$F_{11}=c_{11}B\tilde{B}B^*-c_{-11}B\tilde{B}B^*$、$E_{21}=c_{21}B\tilde{B}A^*-c_{-21}B\tilde{B}A^*$、$F_{21}=c_{21}B\tilde{B}B^*-c_{-21}B\tilde{B}B^*$、$E_{31}=c_{31}B\tilde{B}A^*-c_{-31}B\tilde{B}A^*$、$F_{31}=c_{31}B\tilde{B}B^*-c_{-31}B\tilde{B}B^*$ 等等，則式(23)又可改寫為：

$$
u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{E_{mn}\cos\left(\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\pi ct\right)+F_{mn}\sin\left(\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\pi ct\right)\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{24}
$$

所計算出之 $u(x,y,t)$ 再代入條件不為零之初始條件 $u(x,y,0)=f(x,y)$、$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=g(x,y)$ 中，則：

$$
u(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{E_{mn}\cos 0+F_{mn}\sin 0\}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=f(x,y) \tag{25a}
$$

$$
\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\pi c\{-E_{mn}\sin 0+F_{mn}\cos 0\}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=g(x,y) \tag{25b}
$$

式(25a)與式(25b)又可改寫為：

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} = f(x,y) \tag{26a}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\,\pi c F_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} = g(x,y) \tag{26b}$$

對式(26a)而言，若令$\Theta_m = \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}$，則式(26a)可改寫$\sum_{m=1}^{\infty}\Theta_m \sin\frac{m\pi x}{a} = f(x,y)$，為若欲求出係數$\Theta_m$之值，則需回顧以往在 Fourier 級數中所介紹的觀念。亦即：

若函數$h(x)$係週期為$2L$的函數，則其可以 Fourier 級數加以表示：

$$h(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

其中$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} h(x)dx$、$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} h(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$、$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} h(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$。

又若函數$h(x)$為奇函數，則$a_0 = 0$、$a_n = 0$、$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} h(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$，故

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

應用以上觀念，則$\Theta_m = \frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}dx$。又因為$\Theta_m = \sum_{n=1}^{\infty}E_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}$，故$E_{mn} = \frac{2}{b}\int_0^b \Theta_m \sin\frac{n\pi y}{b}dy$，再將$\Theta_m$代入$E_{mn}$，故：

$$E_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dydx \tag{27}$$

同理，式(26b)中之係數$\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\,\pi c F_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dydx$，故式(26b)中之係數$F_{mn}$可表為：

$$F_{mn}=\frac{4}{\pi abc\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dydx \tag{28}$$

將係數E_{mn}、F_{mn}代回式(24)，則最後滿足問題之邊界條件及初始條件的特解可整理為：

$$\boxed{\begin{aligned}u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}&\left\{\left[\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dydx\right]\cos\left(\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\pi ct\right)\right.\\&\left.+\left[\frac{4}{\pi abc\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dydx\right]\sin\left(\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\pi ct\right)\right\}\\&\cdot\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\qquad(29)\end{aligned}}$$