提要 290：二維波傳方程式的推導

大自然當中之每一個現象都應遵守一些的自然律。以波傳問題而言，波是一種力量的傳遞，而與力量有關的主要自然律就是牛頓三大運動定律，目前所考慮的波傳問題，則是與牛頓第二運動定律特別相關。之前已根據牛頓第二運動定律推導過一維波傳方程式，以下所示之二維波傳方程式的推導，亦是根據牛頓第二運動定律所推導出來的，請讀者慢慢欣賞。

二維波傳方程式

若$u(x,y,t)$表薄膜上質點因波動所引致之垂直位移量，則根據牛頓第二運動定律可建立出問題之控制方程式(Governing Equation)為：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

其中係數$c=T/\rho$是波傳速度，T、ρ分別為薄膜單位長度拉力與面積密度。上式常稱之為二維波傳方程式。

證明：

如圖 1 所示之薄膜振動：

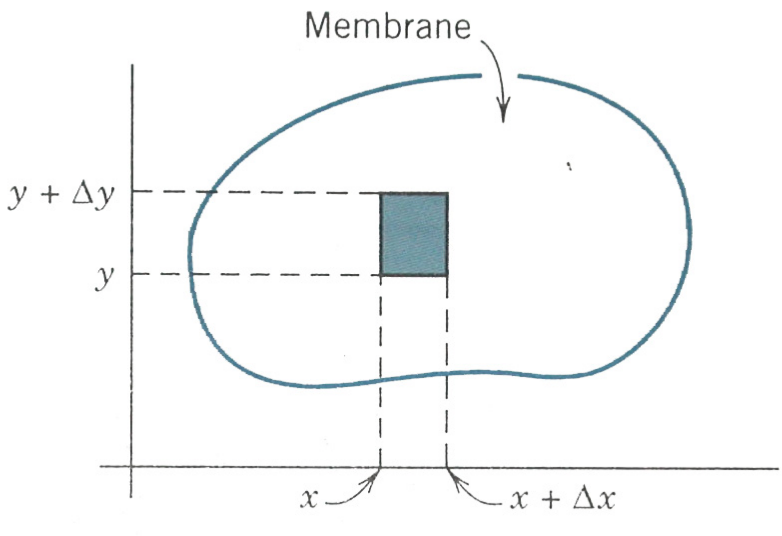

圖 1　一維之薄膜振動問題示意圖

茲擬以牛頓第二運動定律推導出問題之控制方程式。在圖上取一小片面積ΔA作力平衡

之分析，如圖 2 所示：

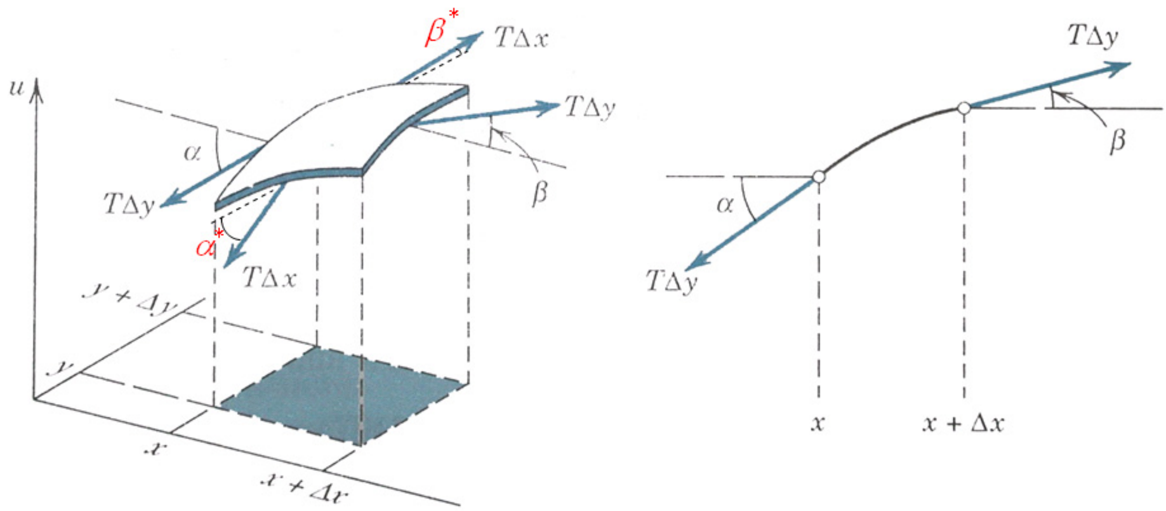

圖 2　取薄膜上之一小片面積 ΔA 作分析

並且假設：

- 薄膜為均質，其單位面積之質量為 $\rho\ \left[kg/m^2\right]$；
- 薄膜完全柔軟，故薄膜內不會產生彎矩力；
- 薄膜四邊固定在 xy 平面上，在振動過程中薄膜內每一點之單位長度張力都是 T；
- 薄膜之垂直位移量 $u(x,y,t)$ 很小，故薄膜中每一質點角度變化所形成的斜率很小。

由牛頓第二運動定律知：

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \tag{1}$$

其中薄膜在水平方向上並無加速度，故 $a_x = 0$；另外，面積 ΔA 之質量應為 $\rho\Delta x\Delta y$。基於此，式(1)可改寫為：

$$\begin{cases} T\Delta y\cos\beta - T\Delta y\cos\alpha + T\Delta x\cos\beta^* - T\Delta x\cos\alpha^* = 0 \\ T\Delta y\sin\beta - T\Delta y\sin\alpha + T\Delta x\sin\beta^* - T\Delta x\sin\alpha^* = ma_y \end{cases} \tag{2}$$

其中 $m = \rho\Delta x\Delta y$ 、 $a_y = \partial^2 u/\partial t^2$ 。

由基本假設知，$\alpha \approx \beta \approx 0$ 、$\alpha^* \approx \beta^* \approx 0$，故式(2)中之

$$\begin{aligned} &\cos\alpha \approx \cos\beta \approx 1 \text{、} \cos\alpha^* \approx \cos\beta^* \approx 1 \\ &\sin\alpha \approx \tan\alpha = \partial u(x,y,t)/\partial x \text{、} \sin\beta \approx \tan\beta = \partial u(x+\Delta x,y,t)/\partial x \\ &\sin\alpha^* \approx \tan\alpha^* = \partial u(x,y,t)/\partial y \text{、} \sin\beta^* \approx \tan\beta^* = \partial u(x,y+\Delta y,t)/\partial y \end{aligned} \tag{3}$$

所以式(2)之第一式自動滿足；而式(2)之第二式應可改寫為：

$$\begin{aligned}&\left[T\Delta y\frac{\partial u(x+\Delta x,y,t)}{\partial x}-T\Delta y\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right]+\left[T\Delta x\frac{\partial u(x,y+\Delta y,t)}{\partial y}-T\Delta x\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right]\\&=\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{4}$$

式 (4) 除以 $T\Delta x\Delta y$，再引用函數微分之定義 $\frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$、$\frac{dg(y)}{dy}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}$，則式(4)又可表示成：

$$\frac{\partial\left[\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right]}{\partial x}+\frac{\partial\left[\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right]}{\partial y}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}\tag{5}$$

上式通常表為：

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}}\tag{6}$$

其中 $c=\sqrt{T/\rho}$，常數 c 相當於波速。由單位之討論也可以知道 c 相當於波速，因為單位長度張力 T 的單位是牛頓 $[N/m]$，牛頓 $[N]$ 是力量之單位，而力量是質量 $[kg]$ 與運動加速度 $[m/\sec^2]$ 的相乘積，故單位長度張力 T 的單位是 $[kg\cdot m/\sec^2\cdot m]$；另外，面積密度 ρ 的單位是 $[kg/m^2]$，所以常數 c 的單位是 $\sqrt{[kg\cdot m/\sec^2\cdot m]/[kg/m^2]}$ 的組合，也就是說常數 c 的單位是 $m/\sec$，亦即常數 c 相當於速度。以上說明即證明之完成。