提要 288：應用分離變數法解析一維熱傳問題

作者曾介紹一維波傳方程式的分離變數法解題過程，以下擬解釋一維熱傳問題數學模式之解題過程。另外，讀者除了應學會解題過程之外，也應講得出控制方程式暨每一個條件方程式在工程上所代表的意義。

一維熱傳問題之數學模式

如圖 1 所示一維熱傳問題之數學模式為：

- 控制方程式：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$ 【能量不滅定律與熱傳導定律的化身】，其中 $u(x,t)$ 表質點之溫度；係數 c 是與物體之密度、比熱、熱傳導係數等相關。
- 邊界條件：$u(0,t)=0$ 【桿件左邊溫度為 0°C】
  $u(L,t)=0$ 【桿件右邊溫度為 0°C】
- 初始條件：$u(x,0)=f(x)$ 【桿件之初始溫度分佈函數為 $f(x)$】

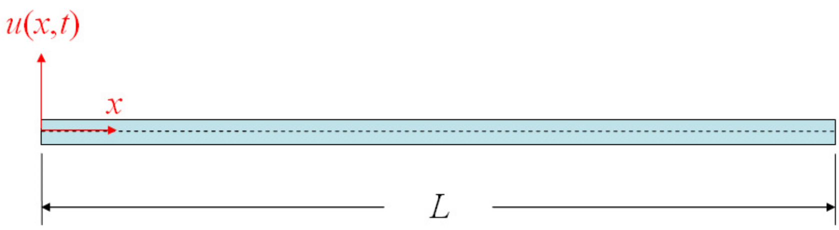

圖 1　一維桿件溫度分佈問題示意圖

解答：

紅色框線部分很重要，其有助於瞭解控制方程式暨每一個條件方程式在工程上所代表的意義。熱傳導問題是對時間變數微分一次的問題，而波傳問題是對時間變數微分兩次的問題，似乎微分次數較少，理應解題過程會較簡單，其實倒也不見得！茲將解析過程分為三個步驟加以說明。

■ 步驟一　引用分離變數法

茲考慮空間變數與時間變數可分離，亦即令$u(x,t)=F(x)G(t)$，再代入控制方程式：

$$\frac{\partial^2(FG)}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial(FG)}{\partial t} \tag{1}$$

上式等號左邊僅需對 x 微分、等號右邊僅需對 t 微分，故上式可改寫為：

$$G\frac{d^2F}{dx^2}=\frac{1}{c^2}F\frac{dG}{dt} \tag{2}$$

因函數$F(x)$與$G(t)$均為單一變數的函數，故其微分符號可改寫為常微分符號。為方便起見，式(2)亦常表為：

$$GF''=\frac{1}{c^2}F\dot{G} \tag{2'}$$

式(2’)等號左右兩邊同時除以FG，則式(2’)可改寫為：

$$\frac{F''}{F}=\frac{1}{c^2}\frac{\dot{G}}{G} \tag{3}$$

因上式等號左邊為與函數$F(x)$有關之運算，故其運算結果應與變數 x 有關；同理，上式等號右邊為與函數$G(t)$有關之運算，且c為常數，故其運算結果應與變數 t 有關。然而，一個和變數 x 有關之運算若欲與一個和變數 t 有關之運算相等，唯一的可能就是它們都是常數，也就是說：

$$\frac{F''}{F}=\frac{1}{c^2}\frac{\dot{G}}{G}=常數 \tag{4}$$

但是常數還是有講究的，常數可分為三類：❶零 ❷正的常數 ❸負的常數，其中僅第三種狀況會是合理的！為節省篇幅，另兩種狀況擬安排在後面之【附註】中加以說明。基於此，式(4)可表為：

$$\frac{F''}{F}=\frac{1}{c^2}\frac{\dot{G}}{G}=-k^2 \tag{5}$$

上式可拆開變成兩個常微分方程式：

$$F''+k^2F=0 \tag{6a}$$

$$\dot{G}+c^2k^2G=0 \tag{6b}$$

■ 步驟二　$u(x,t)$之通解的解析

式(6a)之解析

茲考慮函數$F(x)$解之型態為：

$$F(x)=e^{\lambda x} \tag{7}$$

再代回式(6a)，則式(6a)可表為：

$$\begin{aligned}&\left(e^{\lambda x}\right)''+k^2\left(e^{\lambda x}\right)=0\\ \Rightarrow&\left(\lambda^2+k^2\right)e^{\lambda x}=0\end{aligned}$$

因為$e^{\lambda x}\neq 0$，所以

$$\lambda^2+k^2=0 \tag{8}$$

上式稱之為**特徵方程式(Characteristic Equation)**。解析式(8)可得**特徵根(Characteristic Root)** $\lambda=\pm ik$，故$F(x)=e^{ikx}$與$F(x)=e^{-ikx}$均為式(6a)之解。因式(6a)為**線性且齊性之常微分方程式(Linear Homogeneous Ordinary Differential Equation)**，故可根據**重疊原理(Superposition Principle)**，將所得出之兩個$F(x)$分別乘以係數C_1、C_2，再作疊加之運算，則所得出的解仍為式(6a)之解，如以下所示：

$$F(x)=C_1e^{ikx}+C_2e^{-ikx} \tag{9}$$

上式還可根據**尤拉公式(Euler Formula)** $e^{\pm it}=\cos t\pm i\sin t$，將指數函數化簡為正弦和餘弦函數之和：

$$\begin{aligned}F(x)&=C_1(\cos kx+i\sin kx)+C_2(\cos kx-i\sin kx)\\&=(C_1+C_2)\cos kx+i(C_1-C_2)\sin kx\\&=A\cos kx+B\sin kx\end{aligned} \tag{10}$$

其中$A=C_1+C_2$、$B=i(C_1-C_2)$。

式(6b)之解析

茲考慮函數$G(t)$解之型態為：

$$G(t)=e^{\lambda t} \tag{11}$$

再代回式(6b)，則式(6b)可表為：

$$\left(e^{\lambda t}\right)' + c^2k^2\left(e^{\lambda t}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \left(\lambda + c^2k^2\right)e^{\lambda t} = 0$$

因為$e^{\lambda t} \neq 0$，所以

$$\lambda + c^2k^2 = 0 \tag{12}$$

上式稱之為**特徵方程式(Characteristic Equation)**。解析式(12)可得**特徵根(Characteristic Root)** $\lambda = -c^2k^2$，故$G(t) = e^{-c^2k^2t}$為式(6b)之解。因式(6b)為**線性且齊性之常微分方程式(Linear Homogeneous Ordinary Differential Equation)**，故可根據**重疊原理(Superposition Principle)**，將所得出之$G(t)$乘以係數$\tilde{C}$，則所得出的解仍為式(6b)之解，如以下所示：

$$G(t) = \tilde{C}e^{-c^2k^2t} \tag{13}$$

因$u(x,t) = F(x)G(t)$，故：

$$u(x,t) = (A\cos kx + B\sin kx)\tilde{C}e^{-c^2k^2t} \tag{14}$$

■ 步驟三　$u(x,t)$之特解的解析

由題意知，$u(x,t)$應滿足兩個邊界條件及一個初始條件，這三個條件剛好夠解式(14)中之三個獨立的未知數，說明如下。首先將$u(x,t)$代入條件為零的邊界條件：

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

故

$$u(0,t) = (A\cos 0 + B\sin 0)\tilde{C}e^{-c^2k^2t} = 0 \tag{16a}$$

$$u(L,t) = (A\cos kL + B\sin kL)\tilde{C}e^{-c^2k^2t} = 0 \tag{16b}$$

式(16a)與式(16b)中，$\tilde{C}e^{-c^2k^2t} \neq 0$，所以式(16a)與式(16b)可改寫為：

$$A\cos 0 + B\sin 0 = 0 \tag{17a}$$

$$A\cos kL + B\sin kL = 0 \tag{17b}$$

由式(17a)知：

$$A=0 \tag{18}$$

因 $A=0$，故式(17b)可改寫為 $B\sin kL=0$。此亦屬於兩部分相乘等於零的問題，因為 B 不能再等於零【若 $B=0$，則 $F(x)=0$，且會導致 $u(x,t)=0$】，所以只好讓 $\sin kL=0$ 中之參數 kL 被安排為式(19)之型態，否則 $\sin kL=0$ 無法成立：

$$kL=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi,\pm 4\pi,\pm 5\pi,\cdots \tag{19}$$

亦即：

$$k=0,\pm\frac{\pi}{L},\pm\frac{2\pi}{L},\pm\frac{3\pi}{L},\pm\frac{4\pi}{L},\pm\frac{5\pi}{L},\cdots \tag{19'}$$

將式(18)與式(19')代入式(14)，可得出以下情況之解：

❶ 當 $k=0$ 時

$$u(x,t)=B\sin 0\left(\tilde{C}e^{-0}\right)=0=u_0$$

❷ 當 $k=\frac{\pi}{L}$ 時

$$u(x,t)=B\sin\frac{\pi x}{L}\left(\tilde{C}e^{-\frac{\pi^2c^2t}{L^2}}\right)=B\tilde{C}\sin\frac{\pi x}{L}e^{-\frac{\pi^2c^2t}{L^2}}=u_1$$

❸ 當 $k=-\frac{\pi}{L}$ 時

$$u(x,t)=B\sin\frac{-\pi x}{L}\left(\tilde{C}e^{-\frac{\pi^2c^2t}{L^2}}\right)=-B\tilde{C}\sin\frac{\pi x}{L}e^{-\frac{\pi^2c^2t}{L^2}}=u_{-1}$$

❹ 當 $k=\frac{2\pi}{L}$ 時

$$u(x,t)=B\sin\frac{2\pi x}{L}\left(\tilde{C}e^{-\frac{4\pi^2c^2t}{L^2}}\right)=B\tilde{C}\sin\frac{2\pi x}{L}e^{-\frac{4\pi^2c^2t}{L^2}}=u_2$$

❺ 當 $k=-\frac{2\pi}{L}$ 時

$$u(x,t)=B\sin\frac{-2\pi x}{L}\left(\tilde{C}e^{-\frac{4\pi^2c^2t}{L^2}}\right)=-B\tilde{C}\sin\frac{2\pi x}{L}e^{-\frac{4\pi^2c^2t}{L^2}}=u_{-2}$$

❻ 當 $k=\frac{3\pi}{L}$ 時

$$u(x,t)=B\sin\frac{3\pi x}{L}\left(\tilde{C}e^{-\frac{9\pi^2c^2t}{L^2}}\right)=B\tilde{C}\sin\frac{3\pi x}{L}e^{-\frac{9\pi^2c^2t}{L^2}}=u_{3}$$

❼ 當 $k=-\frac{3\pi}{L}$ 時

$$u(x,t)=B\sin\frac{-3\pi x}{L}\left(\tilde{C}e^{-\frac{9\pi^2c^2t}{L^2}}\right)=-B\tilde{C}\sin\frac{3\pi x}{L}e^{-\frac{9\pi^2c^2t}{L^2}}=u_{-3}$$

因控制方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 為線齊性偏微分方程式，故以上所示之各種不同型態的 $u(x,t)$ 之解，又可以利用重疊原理加以疊加，組成較廣義之解的型態：

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=c_0u_0+c_1u_1+c_{-1}u_{-1}+c_2u_2+c_{-2}u_{-2}+c_3u_3+c_{-3}u_{-3}+\cdots\\
&=c_0(0)\\
&+c_1\left[B\tilde{C}\sin\frac{\pi x}{L}e^{-\frac{\pi^2c^2t}{L^2}}\right]\\
&+c_{-1}\left[-B\tilde{C}\sin\frac{\pi x}{L}e^{-\frac{\pi^2c^2t}{L^2}}\right]\\
&+c_2\left[B\tilde{C}\sin\frac{2\pi x}{L}e^{-\frac{4\pi^2c^2t}{L^2}}\right]\\
&+c_{-2}\left[-B\tilde{C}\sin\frac{2\pi x}{L}e^{-\frac{4\pi^2c^2t}{L^2}}\right]\\
&+c_3\left[B\tilde{C}\sin\frac{3\pi x}{L}e^{-\frac{9\pi^2c^2t}{L^2}}\right]\\
&+c_{-3}\left[-B\tilde{C}\sin\frac{3\pi x}{L}e^{-\frac{9\pi^2c^2t}{L^2}}\right]\\
&+\cdots
\end{aligned}\tag{20}$$

若考慮 $a_1=c_1B\tilde{C}-c_{-1}B\tilde{C}$ 、 $a_2=c_2B\tilde{C}-c_{-2}B\tilde{C}$ 、 $a_3=c_3B\tilde{C}-c_{-3}B\tilde{C}$ 等等，則式(20)又可

改寫為：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\frac{n^2\pi^2c^2t}{L^2}} \tag{21}$$

所計算出之$u(x,t)$再代入條件不為零之初始條件$u(x,0)=f(x)$中，則：

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-0}=f(x) \tag{22}$$

式(22)又可改寫為：

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{L}=f(x) \tag{23}$$

若欲求出係數之值，則需回顧以往在 Fourier 級數中所介紹的觀念。亦即：

若函數$h(x)$係週期為$2L$的函數，則其可以 Fourier 級數加以表示：

$$h(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

其中$a_0=\dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L}h(x)dx$、$a_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}h(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$、$b_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}h(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$。

又若函數$h(x)$為奇函數，則$a_0=0$、$a_n=0$、$b_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_{0}^{L}h(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$，故

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

應用以上觀念，則式(23)中之係數a_n可表為：

$$a_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \tag{24}$$

將係數a_n代回式(21)，則最後滿足問題之邊界條件及初始條件的特解可整理為：

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right]\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\frac{n^2\pi^2c^2t}{L^2}}} \tag{25}$$

附註：說明式(4)中之常數考慮為不合理的零或正的常數

1. 將式(4)中之常數考慮為零，亦即：

$$\frac{F''}{F}=\frac{1}{c^2}\frac{\dot{G}}{G}=0 \tag{26}$$

則上式可改寫為：

$$\begin{cases} F''=0 \\ \dot{G}=0 \end{cases}$$

各自解析後可得：

$$\begin{cases} F(x)=c_1x+c_2 \\ G(t)=\tilde{c}_1 \end{cases}$$

故

$$u(x,t)=(c_1x+c_2)(\tilde{c}_1)$$

代入邊界條件 $u(0,t)=0$ 、 $u(L,t)=0$ 可知：

$$\begin{cases} u(0,t)=[c_1(0)+c_2](\tilde{c}_1)=0 \\ u(L,t)=[c_1(L)+c_2](\tilde{c}_1)=0 \end{cases}$$

因為 $\tilde{c}_1\neq 0$，所以上式可改寫為：

$$\begin{cases} c_2=0 \\ c_1(L)+c_2=0 \end{cases}$$

由以上兩式可解出 $c_1=c_2=0$，故 $F(x)=0$ ，這會導致 $u(x,t)=0$ ！但實際上桿件於任意時刻 t 在任意位置 x 之溫度並非全部為零，故式(26)之假設是錯誤的。

2. $\boxed{\text{將式(4)中之常數考慮為正的常數}}$，亦即：

$$\frac{F''}{F}=\frac{1}{c^2}\frac{\dot{G}}{G}=k^2 \tag{27}$$

則上式可改寫為：

$$\begin{cases} F''-k^2F=0 \\ \dot{G}-c^2k^2G=0 \end{cases}$$

各自解析後可得：

$$\begin{cases} F(x)=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx} \\ G(t)=\tilde{c}_1e^{c^2k^2t} \end{cases}$$

故

$$u(x,t)=\left(c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}\right)\left(\tilde{c}_1e^{c^2k^2t}\right)$$

代入邊界條件$u(0,t)=0$、$u(L,t)=0$可知：

$$\begin{cases} u(0,t)=\left(c_1e^{0}+c_2e^{0}\right)\left(\tilde{c}_1e^{c^2k^2t}\right)=0 \\ u(L,t)=\left(c_1e^{kL}+c_2e^{-kL}\right)\left(\tilde{c}_1e^{c^2k^2t}\right)=0 \end{cases}$$

因為$\tilde{c}_1e^{c^2k^2t}\neq 0$，所以上式可改寫為：

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1e^{kL}+c_2e^{-kL}=0 \end{cases}$$

由以上兩式可解出$c_1=c_2=0$，故$F(x)=0$，這會導致$u(x,t)=0$！但實際上桿件在任意時刻t於任意位置x之質點溫度並非全部為零，故式(27)之假設是錯誤的。