提要 284：一維波傳方程式的推導

大自然當中之每一個現象都應遵守一些的自然律。以波傳問題而言，波是一種力量的傳遞，而與力量有關的主要自然律就是牛頓三大運動定律，目前所考慮的波傳問題，則是與牛頓第二運動定律特別相關。以下所示之一維波傳方程式，即是根據牛頓第二運動定律(Newton's Second Law)所推導出來的，請讀者慢慢欣賞。

一維波傳方程式

若 $u(x,t)$ 表繩上質點因波動所引致之垂直位移量，則根據牛頓第二運動定律可建立出問題之控制方程式(Governing Equation)：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

其中係數 c 稱為波傳速度(Wave Velocity)。上式常稱之為一維波傳方程式。

證明：

如圖 1 所示之弦索振動：

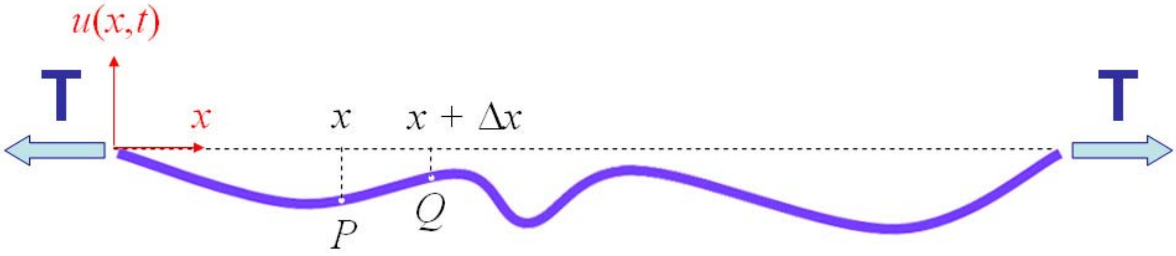

圖 1　一維之弦索振動問題示意圖

茲擬以牛頓第二運動定律推導出問題之控制方程式。在圖上取一小段弦索長度 Δx 作力平衡之分析，如圖 2 所示：

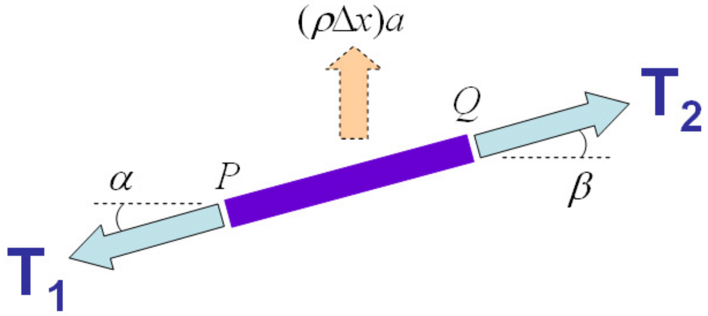

圖 2　取弦索上之 PQ 一小段長度 Δx 作分析

並且假設：

- 弦索為均質，其單位長度之質量為 $\rho[kg/m]$；
- 弦索兩端之張力夠大，致使重力的影響可以忽略；
- 弦索之垂直位移量很小，故每一質點均在同一垂直線上移動，且弦索之斜率很小。

由牛頓第二運動定律知：

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y\end{cases} \tag{1}$$

其中弦索在水平方向上並無加速度，故 $a_x = 0$；另外，PQ 線段之質量應為 $\rho\Delta x$。基於此，式(1)可改寫為：

$$\begin{cases}T_2\cos\beta - T_1\cos\alpha = 0 \\ T_2\sin\beta - T_1\sin\alpha = ma_y\end{cases} \tag{2}$$

其中 $m = \rho\Delta x$、$a_y = \partial^2 u/\partial t^2$。

由基本假設知，$\alpha \approx \beta \approx 0$，故式(2)中之

$$\cos\alpha \approx \cos\beta \approx 1 \text{、} \sin\alpha \approx \tan\alpha = \partial u(x,t)/\partial x \text{、} \sin\beta \approx \tan\beta = \partial u(x+\Delta x,t)/\partial x \tag{3}$$

所以式(2)可改寫為：

$$\begin{cases}T_2 - T_1 = 0 \\ T_2\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - T_1\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \rho\Delta x\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\end{cases} \tag{4}$$

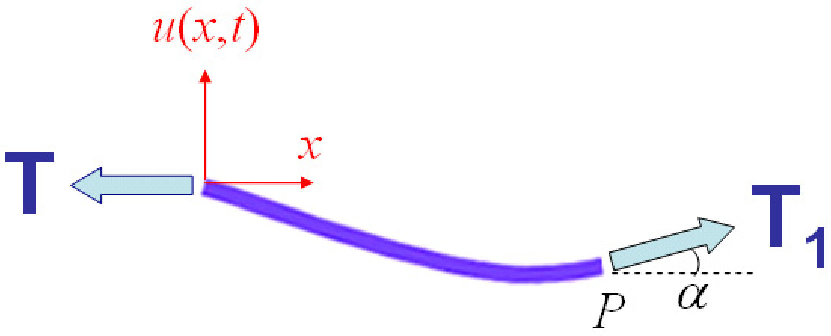

圖 3　考慮 P 點左半邊弦索之水平力量的平衡

另外，由圖 3 之水平力量的平衡知：

$$T_1 \cos\alpha = T \tag{5}$$

因其中之 $\cos\alpha \approx 1$，故由式(4)之第一式與式(5)知：

$$T_2 = T_1 = T \tag{6}$$

基於此，式(4)之第二式應可改寫為：

$$\frac{\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{7}$$

再引用函數微分之定義 $\dfrac{df(x)}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$，則式(7)又可表示成：

$$\frac{\partial\left[\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]}{\partial x} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{8}$$

上式通常表為：

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}} \tag{9}$$

其中 $c = \sqrt{T/\rho}$，常數 c 相當於波速。由單位之討論也可以知道 c 相當於波速，因為張力 T 的單位是牛頓 $[N]$，牛頓 $[N]$ 是力量之單位，而力量是質量 $[kg]$ 與運動加速度 $[m/\sec^2]$ 的相乘積，故張力 T 的單位是 $[kg \cdot m/\sec^2]$；另外，線密度 ρ 的單位是 $[kg/m]$，所以常數 c 的單位是 $\sqrt{[kg \cdot m/\sec^2]/[kg/m]}$ 的組合，也就是說常數 c 的單位是 $m/\sec$，亦即常數 c 相當於速度。以上說明即證明之完成。