提要 283：偏微分方程式之解的重疊原理

偏微分方程式(Partial Differential Equation)之解的重疊原理(Superposition Principle)與常微分方程式之解的重疊原理是一樣的，說明如下：

偏微分方程式之解的重疊原理(Superposition Principle)
若 u_1 、 u_2 分別為線齊性偏微分方程式之解， 則 $u = c_1u_1 + c_2u_2$ (c_1 、 c_2 為任意常數)亦為原式之解，稱為通解(General Solution)。 其中 u_1 、 u_2 稱為通解中之基底(Basis)。

證明：

茲以三維之 Laplace 偏微分方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ 為例加以證明。設 u_1 、 u_2 均為此 Laplace 偏微分方程式之解，則：

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = 0$$

以上兩式分別乘以 c_1 、 c_2 ，再相加後可得：

$$\left(c_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) + \left(c_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right) + \left(c_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + c_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right) = 0$$

並可改寫為：

$$\frac{\partial^2 (c_1u_1 + c_2u_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (c_1u_1 + c_2u_2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (c_1u_1 + c_2u_2)}{\partial z^2} = 0$$

由此可知 $u = c_1u_1 + c_2u_2$ 亦為線齊性偏微分方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ 之解。

附註：重疊原理僅適用於線性且齊性的微分方程式。