提要 281：Fourier 轉換之 Convolution 定理

Fourier 轉換之 Convolution 定理如以下所示：

Fourier 轉換之 Convolution 定理
已知函數 $f(x)$ 及 $g(x)$ 為片斷連續之有界且可積分之函數，則： $$F\{f*g\}=\sqrt{2\pi}F\{f\}F\{g\} \tag{1}$$

證明：

由定義知：

$$F\{f*g\}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)g(x-p)e^{-i\omega x}\,dp\,dx=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)g(x-p)e^{-i\omega x}\,dx\,dp \tag{2}$$

茲作適當之變數變換，將變數 x 改寫為變數 q ，亦即令：

$$x-p=q \tag{3}$$

則當 $x=\infty$ 時， $q=\infty$ ；當 $x=-\infty$ 時， $q=-\infty$ ；且 $x=p+q$ ， $dx=dq$ 。基於此，式(2)可改寫為：

$$
\begin{aligned}
F\{f*g\} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(q)e^{-i\omega(p+q)}dq\,dp \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(q)e^{-i\omega p}e^{-i\omega q}dq\right]dp \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(p)e^{-i\omega p}\int_{-\infty}^{\infty} g(q)e^{-i\omega q}dq\right]dp \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-i\omega p}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(q)e^{-i\omega q}dq\right]dp \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-i\omega p}\,dp\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(q)e^{-i\omega q}dq\right] \\
&= \sqrt{2\pi}\left[\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-i\omega p}\,dp\right]\left[\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(q)e^{-i\omega q}dq\right] \\
&= \sqrt{2\pi}F\{f\}F\{g\}
\end{aligned}
$$

故得證。