提要 280：微分函數之 Fourier 轉換

週期為 ∞ 的微分函數 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 之 Fourier 轉換分別如以下所示：

週期為 ∞ 的微分函數 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 之 Fourier 轉換
週期為 ∞ 的微分函數 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 之 Fourier 轉換分別定義為： $F\{f'(x)\} = i\omega F\{f(x)\}$ (1) $F\{f''(x)\} = -\omega^2 F\{f(x)\}$ (1')

證明：

■ 式(1)之證明

由定義知，週期為 ∞ 的函數 $f'(x)$ 之 Fourier 轉換可表為：

$$\begin{aligned}
F\{f'(x)\} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}df(x) \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[e^{-i\omega x}f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)de^{-i\omega x}\right] \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[e^{-i\omega\infty}f(\infty) - e^{i\omega\infty}f(-\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(-i\omega e^{-i\omega x}dx\right)\right] \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[f(\infty)(\cos\infty - i\sin\infty) - f(-\infty)(\cos\infty + i\sin\infty) + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right]
\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\sin\infty$、$\cos\infty$ 為介於 $[-1,1]$ 之有限值，若考慮 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$，則 $f(\infty)(\cos\infty - i\sin\infty) = 0$、$f(-\infty)(\cos\infty + i\sin\infty) = 0$，故式(2)可再化簡為：

$$F\{f'(x)\} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right] = i\omega\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = i\omega F\{f(x)\} \tag{2'}$$

故得證。

■ 式(1’)之證明

由式(2’)及 Fourier 轉換之定義知，週期為 ∞ 的函數 $f''(x)$ 之 Fourier 轉換可表為：

$$\boxed{F\{f''(x)\} = i\omega F\{f'(x)\} = (i\omega)^2 F\{f(x)\} = -\omega^2 F\{f(x)\}} \qquad (3)$$

故得證。

附註：對微分函數之 Fourier 轉換的清楚瞭解，有助於往後應用於解析微分方程式，但這一部分的應用是屬於研究所的程度。