提要 279：微分函數之 Fourier Sine 轉換與 Fourier Cosine 轉換

今擬探討週期為 ∞ 的函數 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 之 Fourier Sine 轉換及 Fourier Cosine 轉換。已知其結果如以下所示：

週期為 ∞ 的函數 $f'(x)$ 與 $f''(x)$ 之 Fourier Sine 轉換

週期為 ∞ 的函數 $f'(x)$ 與 $f''(x)$ 之 Fourier Sine 轉換係分別定義為：

$$F_s\{f'(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f'(x) \sin \omega x dx = -\omega F_c\{f(x)\} \qquad (1)$$

$$F_s\{f''(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f''(x) \sin \omega x dx = -\omega^2 F_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f(0) \qquad (1')$$

其中 $F_c\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x dx$、$F_s\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x dx$，係分別為函數 $f(x)$ 之 Fourier Cosine 轉換及 Fourier Sine 轉換。

週期為 ∞ 的函數 $f'(x)$ 與 $f''(x)$ 之 Fourier Cosine 轉換

週期為 ∞ 的函數 $f'(x)$ 與 $f''(x)$ 之 Fourier Cosine 轉換係分別定義為：

$$F_c\{f'(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f'(x) \cos \omega x dx = \omega F_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) \qquad (2)$$

$$F_c\{f''(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f''(x) \cos \omega x dx = -\omega^2 F_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) \qquad (2')$$

其中 $F_s\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x dx$、$F_c\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x dx$，係分別為函數 $f(x)$ 之 Fourier Sine 轉換及 Fourier Cosine 轉換。

證明：

■ 式(1)之證明

由定義知，週期為 ∞ 的函數 $f'(x)$ 之 Fourier Sine 轉換可表為：

$$
\begin{aligned}
F_s\{f'(x)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(x)\sin\omega x dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin\omega x\, df(x) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(x)\sin\omega x\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(x)d(\sin\omega x)\right] \qquad (3)\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(\infty)\sin\omega\infty - f(0)\sin 0 - \int_0^\infty f(x)(\omega\cos\omega x)dx\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(\infty)\sin\infty - \omega\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\, dx\right]
\end{aligned}
$$

其中 $\sin\infty$ 為介於 $[-1,1]$ 之有限值，若考慮 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$，則 $f(\infty)\sin\infty=0$，故式(3)可再化簡為：

$$
\boxed{F_s\{f'(x)\} = -\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\, dx = -\omega F_c\{f(x)\}} \qquad (3')
$$

故得證。

■ 式(1')之證明

由定義及式(3')知，週期為 ∞ 的函數 $f''(x)$ 之 Fourier Sine 轉換可表為：

$$
\begin{aligned}
F_s\{f''(x)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f''(x)\sin\omega x dx \\
&= -\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(x)\cos\omega x\, dx \\
&= -\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos\omega x\, df(x) \\
&= -\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(x)\cos\omega x\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(x)d(\cos\omega x)\right] \\
&= -\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(\infty)\cos\omega\infty - f(0)\cos 0 - \int_0^\infty f(x)(-\omega\sin\omega x dx)\right] \\
&= -\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(\infty)\cos\infty - f(0) + \omega\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\, dx\right]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

其中 $\cos\infty$ 為介於 $[-1,1]$ 之有限值，若考慮 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ ，則 $f(\infty)\cos\infty=0$ ，故式(4)可再化簡為：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
F_s\{f''(x)\} &= -\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[- f(0) + \omega\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\, dx\right] \\
&= -\omega^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\, dx + \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) \\
&= -\omega^2 F_s\{f(x)\} + \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)
\end{aligned}
}
\tag{4'}
$$

故得證。

■ 式(2)之證明

由定義知，週期為 ∞ 的函數 $f'(x)$ 之 Fourier Cosine 轉換可表為：

$$
\begin{aligned}
F_c\{f'(x)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(x)\cos\omega x dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos\omega x df(x) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(x)\cos\omega x\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(x)d(\cos\omega x)\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(\infty)\cos\omega\infty - f(0)\cos 0 - \int_0^\infty f(x)(-\omega\sin\omega x dx)\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(\infty)\cos\infty - f(0) + \omega\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx\right]
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

其中 $\cos\infty$ 為介於 $[-1,1]$ 之有限值，若考慮 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$，則 $f(\infty)\cos\infty=0$，故式(5)可再化簡為：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
F_c\{f'(x)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-f(0) + \omega\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx\right] \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) + \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) + \omega F_s\{f(x)\}
\end{aligned}
}
\qquad (5')
$$

故得證。

■ 式(2')之證明

由定義及式(5')、式(3')知，週期為 ∞ 的函數 $f''(x)$ 之 Fourier Cosine 轉換可表為：

$$\begin{aligned} F_c\{f''(x)\} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)+\omega F_s\{f'(x)\} \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)+\omega[-\omega F_c\{f(x)\}] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)-\omega^2 F_c\{f(x)\} \end{aligned} \tag{6}$$

故得證。

附註：對微分函數之 Fourier Sine 轉換及 Fourier Cosine 轉換之瞭解，有助於往後應用於解析微分方程式，但通常這一部分的應用是屬於研究所的程度。