提要 278：Fourier Sine 轉換與 Fourier Cosine 轉換

已知週期 ∞ 的奇函數 $f(x)$ 之 Fourier Sine 積分定義如下。

週期為 ∞ 的奇函數 $f(x)$ 之 Fourier Sine 積分
週期為 ∞ 的奇函數 $f(x)$ 之 Fourier Sine 積分係定義為： $$f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\,d\omega \qquad (1)$$ 其中 $B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$，亦即： $$f(x)=\int_0^\infty\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx\right]\sin\omega x\,d\omega \qquad (1')$$

又已知週期 ∞ 的偶函數 $f(x)$ 之 Fourier Cosine 積分定義如下。

週期為 ∞ 的偶函數 $f(x)$ 之 Fourier Cosine 積分
週期為 ∞ 的偶函數 $f(x)$ 之 Fourier Cosine 積分係定義為： $$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\,d\omega \qquad (2)$$ 式中 $A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$，亦即： $$f(x)=\int_0^\infty\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx\right]\cos\omega x\,d\omega \qquad (2')$$

式(1')及式(2')可將其中之係數 $2/\pi$ 改寫為兩個 $\sqrt{2/\pi}$ 相乘。基於此，可再定義兩個新名詞，如式(3)與式(4)所示。

週期為 ∞ 的奇函數 *f*(*x*) 之 Fourier Sine 轉換及反轉換

週期為 ∞ 的奇函數 $f(x)$ 之 Fourier Sine 轉換係定義為：

$$\hat{f}_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx \tag{3}$$

而函數 $\hat{f}_s(\omega)$ 之 Fourier Sine 反轉換則定義為：

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(\omega)\sin\omega x\, d\omega \tag{3'}$$

週期為 ∞ 的偶函數 *f*(*x*) 之 Fourier Cosine 轉換及反轉換

週期為 ∞ 的偶函數 $f(x)$ 之 Fourier Cosine 轉換係定義為：

$$\hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx \tag{4}$$

而函數 $\hat{f}_c(\omega)$ 之 Fourier Cosine 反轉換則定義為：

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(\omega)\cos\omega x\, d\omega \tag{4'}$$

附註：說實在的，要讀者去記這兩個新名詞並無必要！不過讀者應瞭解前一單元所出現的兩個新名詞**「Fourier Sine 積分」**、**「Fourier Cosine 積分」**，以及這個單元所介紹的另外兩個新名詞**「Fourier Sine 轉換」**、**「Fourier Cosine 轉換」**，都是由「Fourier 積分」來的，且跟轉換有關之方程式是調整係數後被定義出來的。

範例一

試求函數 $f(x)=\begin{cases} k, & 0<x<a \\ 0, & x>a \end{cases}$ 之 Fourier Sine 轉換及 Fourier Cosine 轉換。

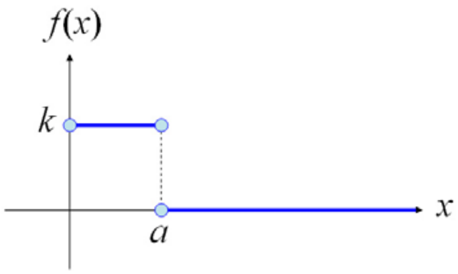

圖 1　題意所示函數 $f(x)$ 的示意圖

解答：

■ 函數 $f(x)$ 之 Fourier Cosine 轉換

函數 $f(x)$ 之 Fourier Cosine 轉換係定義為：

$$\begin{aligned}
\hat{f}_c(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_0^a f(x)\cos\omega x dx + \int_a^\infty f(x)\cos\omega x dx\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_0^a (k)\cos\omega x dx + \int_a^\infty (0)\cos\omega x dx\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a (k)\cos\omega x dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left.\frac{k\sin\omega x}{\omega}\right|_0^a \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k(\sin\omega a-\sin 0)}{\omega} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k\sin\omega a}{\omega}
\end{aligned}$$

■ 函數 $f(x)$之 Fourier Sine 轉換

函數 $f(x)$之 Fourier Sine 轉換係定義為：

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_s(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_0^a f(x)\sin\omega x dx + \int_a^\infty f(x)\sin\omega x dx\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_0^a (k)\sin\omega x dx + \int_a^\infty (0)\sin\omega x dx\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a (k)\sin\omega x dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left.\frac{-k\cos\omega x}{\omega}\right|_0^a \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-k(\cos\omega a - \cos 0)}{\omega} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k(1-\cos\omega a)}{\omega}
\end{aligned}
$$