提要 277：Fourier Sine 積分與 Fourier Cosine 積分

已知週期為∞的函數 $f(x)$之 Fourier 積分可表示為：

週期為 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 積分

週期為 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 積分係定義為：

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega \tag{1}$$

其中

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx$$

若函數 $f(x)$為奇函數，則式(1)所示 Fourier 積分式僅會出現 Sine 項次，且式(1)可改稱為週期 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier Sine 積分，如以下所示。

週期為 ∞ 的奇函數 $f(x)$ 之 Fourier Sine 積分

週期為 ∞ 的奇函數 $f(x)$ 之 Fourier Sine 積分係定義為：

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\, d\omega \tag{2}$$

式(2)中原先存在的 $A(\omega)=0$；而 $B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx$。

同理，若函數 $f(x)$ 為偶函數，則式(1)所示 Fourier 積分式僅會出現 Cosine 項次，且式(1)可改稱為週期 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier Cosine 積分，如以下所示。

週期為 ∞ 的偶函數 $f(x)$ 之 Fourier Cosine 積分
週期為 ∞ 的偶函數 $f(x)$ 之 Fourier Coine 積分係定義為： $$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\,d\omega \qquad (3)$$ 式(3)中原先存在的 $B(\omega)=0$；而 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$。

附註：Fourier Sine 積分及 Fourier Cosine 積分是被創造出來之多餘的新名詞，因為只要瞭解什麼是 Fourier 積分，再引用奇函數及偶函數的特性，這兩個新名詞所代表的積分式自然就會水落石出了！