提要 276：有限區間之 Fourier 轉換與無限區間之 Fourier 轉換

由之前的介紹知，週期函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數主要有三種。第一種是週期為 2π 之函數 $f(x)$，第二種是週期為 $2L$ 之函數 $f(x)$，第三種是週期為∞之函數 $f(x)$。其中第三種週期函數之 Fourier 級數又可以表為與實數有關或與複數有關。

作者想強調一個重點是，在名詞的使用上，「Fourier 級數」或「Fourier 轉換」這兩個名詞是常常被交互使用的，整理說明如下。

週期為 2π 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數（或稱為有限區間之 Fourier 轉換）

週期為 2π 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數係定義為：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{1}$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\text{，}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx\text{，}b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx\text{，}n=1,2,3,\cdots\text{。}$$

週期為 $2L$ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數（或稱為有限區間之 Fourier 轉換）

週期為 $2L$ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數係定義為：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2}$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx\text{，}a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\text{，}b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\text{，}n=1,2,3,\cdots\text{。}$$

週期為 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 積分（或稱為無限區間之 Fourier 轉換）

週期為 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 積分係定義為：

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega \tag{3}$$

其中

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx$$

週期為 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 轉換（或稱為無限區間之 Fourier 轉換）

週期為 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 轉換係定義為：

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \tag{4}$$

其中

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

附註：若所討論的問題之定義域為有限區間，則可選用合適之有限區間的 Fourier 轉換加以解析；若所討論的問題之定義域為無限區間，則可選用合適之無限區間的 Fourier 轉換加以解析。