提要 275：Total Square Error 之定義與應用

Total Square Error 這個專有名詞似乎並不常見，但因為有一本眾多讀者使用的工程數學教科書有提到這個名詞，因此，作者有必要在此仔細介紹其定義，並以一例說明其應用方式。

因為以 Fourier 級數表示週期函數 $f(x)$ 時，理論上所推導出之 Fourier 級數必須取無限多個項次，才能完全準確的代表週期函數 $f(x)$。但是在工程應用上，通常只會取出有限個項次的和代表週期函數 $f(x)$，這就必然會造成誤差，而 Total Square Error 就是為因應這種情況所提出之一種估算誤差的方式。

Total Square Error 之定義

已知週期為 2π 之函數 $f(x)$ 的 Fourier 級數可表為：

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

其中 $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$，$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$，$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$，$n = 1,2,3,\cdots$。

若式(1)取有限項的和，則：

$$f(x) \cong a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (2)$$

令此一有限項的和為 $F(x)$，即：

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (2')$$

則利用式(2’)計算 $f(x)$ 時會產生誤差，而其估算誤差的方式如以下所示：

$$E = \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - F(x)\right]^2 dx \qquad (3)$$

上式所計算出之誤差 E 稱為 Total Square Error。

附註：Total Square Error 取平方的目的是為了避免正的誤差與負的誤差產生相互抵消的現象。因函數 $f(x)$ 是個週期為 2π 之函數，故僅需討論 $[-\pi,\pi]$ 之範圍的積分。

範例一

已知如下圖所示週期為 2π 之函數 $f(x)=\begin{cases} a, & 0<x<\pi \\ -a, & -\pi<x<0 \end{cases}$ 的 Fourier 級數可表為：$f(x)=\dfrac{4a}{\pi}\sin x+\dfrac{4a}{3\pi}\sin 3x+\dfrac{4a}{5\pi}\sin 5x+\cdots$。若取兩項表示函數 $f(x)$，亦即 $f(x)\cong\dfrac{4a}{\pi}\sin x+\dfrac{4a}{3\pi}\sin 3x=F(x)$，試求近似函數 $F(x)$之 Total Square Error。

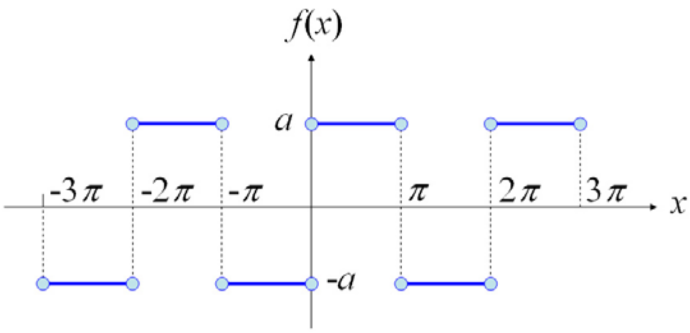

圖 1　週期函數 $f(x)$之圖形示意圖

解答：

Total Square Error 係定義為 $E=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-F(x)]^2dx$，故：

$$\begin{aligned}
E&=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-F(x)]^2dx\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\left(\frac{4a}{\pi}\sin x+\frac{4a}{3\pi}\sin 3x\right)\right]^2dx\\
&=\int_{-\pi}^{0}\left[f(x)-\left(\frac{4a}{\pi}\sin x+\frac{4a}{3\pi}\sin 3x\right)\right]^2dx+\int_{0}^{\pi}\left[f(x)-\left(\frac{4a}{\pi}\sin x+\frac{4a}{3\pi}\sin 3x\right)\right]^2dx\\
&=\int_{-\pi}^{0}\left[-a-\left(\frac{4a}{\pi}\sin x+\frac{4a}{3\pi}\sin 3x\right)\right]^2dx+\int_{0}^{\pi}\left[a-\left(\frac{4a}{\pi}\sin x+\frac{4a}{3\pi}\sin 3x\right)\right]^2dx
\end{aligned}$$

其中第一個積分式之積分值可推導如下：

$$\int_{-\pi}^{0}\left[-a-\left(\frac{4a}{\pi}\sin x+\frac{4a}{3\pi}\sin 3x\right)\right]^2 dx$$

$$=\int_{-\pi}^{0}\left(-a-\frac{4a}{\pi}\sin x-\frac{4a}{3\pi}\sin 3x\right)^2 dx$$

$$=\int_{-\pi}^{0}\left(a+\frac{4a}{\pi}\sin x+\frac{4a}{3\pi}\sin 3x\right)^2 dx$$

$$=\int_{-\pi}^{0}\left(a^2+\frac{16a^2}{\pi^2}\sin^2 x+\frac{16a^2}{9\pi^2}\sin^2 3x+\frac{8a^2}{\pi}\sin x+\frac{8a^2}{3\pi}\sin 3x+\frac{32a^2}{3\pi^2}\sin x\sin 3x\right)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{0}\left(a^2+\frac{8a^2}{\pi}\sin x+\frac{8a^2}{3\pi}\sin 3x\right)dx+\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{16a^2}{\pi^2}\sin^2 x+\frac{16a^2}{9\pi^2}\sin^2 3x+\frac{32a^2}{3\pi^2}\sin x\sin 3x\right)dx$$

$$=\left(a^2x-\frac{8a^2}{\pi}\cos x-\frac{8a^2}{9\pi}\cos 3x\right)_{-\pi}^{0}+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{16a^2}{\pi^2}\sin^2 x+\frac{16a^2}{9\pi^2}\sin^2 3x+\frac{32a^2}{3\pi^2}\sin x\sin 3x\right)dx$$

$$=\left(a^2\pi-\frac{16a^2}{\pi}-\frac{16a^2}{9\pi}\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{16a^2}{\pi^2}(\pi)+\frac{16a^2}{9\pi^2}(\pi)+\frac{32a^2}{3\pi^2}(0)\right]$$

$$=\left(a^2\pi-\frac{16a^2}{\pi}-\frac{16a^2}{9\pi}\right)+\frac{8a^2}{\pi}+\frac{8a^2}{9\pi}$$

$$=a^2\pi-\frac{8a^2}{\pi}-\frac{8a^2}{9\pi}$$

$$=\pi a^2-\frac{80a^2}{9\pi}$$

而第二個積分式之積分值的推導如下：

$$\int_0^{\pi}\left[a-\left(\frac{4a}{\pi}\sin x+\frac{4a}{3\pi}\sin 3x\right)\right]^2 dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(a-\frac{4a}{\pi}\sin x-\frac{4a}{3\pi}\sin 3x\right)^2 dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(a^2+\frac{16a^2}{\pi^2}\sin^2 x+\frac{16a^2}{9\pi^2}\sin^2 3x-\frac{8a^2}{\pi}\sin x-\frac{8a^2}{3\pi}\sin 3x+\frac{32a^2}{3\pi^2}\sin x\sin 3x\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(a^2-\frac{8a^2}{\pi}\sin x-\frac{8a^2}{3\pi}\sin 3x\right)dx+\int_0^{\pi}\left(\frac{16a^2}{\pi^2}\sin^2 x+\frac{16a^2}{9\pi^2}\sin^2 3x+\frac{32a^2}{3\pi^2}\sin x\sin 3x\right)dx$$

$$=\left(a^2x+\frac{8a^2}{\pi}\cos x+\frac{8a^2}{9\pi}\cos 3x\right)_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{16a^2}{\pi^2}\sin^2 x+\frac{16a^2}{9\pi^2}\sin^2 3x+\frac{32a^2}{3\pi^2}\sin x\sin 3x\right)dx$$

$$=\left(a^2\pi-\frac{16a^2}{\pi}-\frac{16a^2}{9\pi}\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{16a^2}{\pi^2}(\pi)+\frac{16a^2}{9\pi^2}(\pi)+\frac{32a^2}{3\pi^2}(0)\right]$$

$$=\left(a^2\pi-\frac{16a^2}{\pi}-\frac{16a^2}{9\pi}\right)+\frac{8a^2}{\pi}+\frac{8a^2}{9\pi}$$

$$=a^2\pi-\frac{8a^2}{\pi}-\frac{8a^2}{9\pi}$$

$$=\pi a^2-\frac{80a^2}{9\pi}$$

由此可知，問題之 Total Square Error 為：

$$\boxed{E=2\left(\pi a^2-\frac{80a^2}{9\pi}\right)=\left(2\pi-\frac{160}{9\pi}\right)a^2}$$