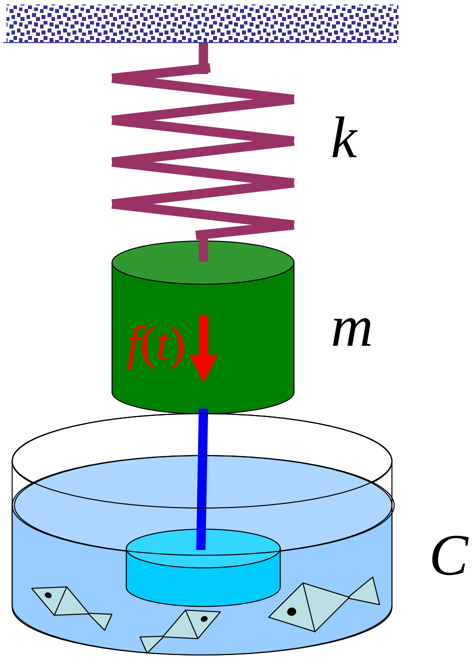
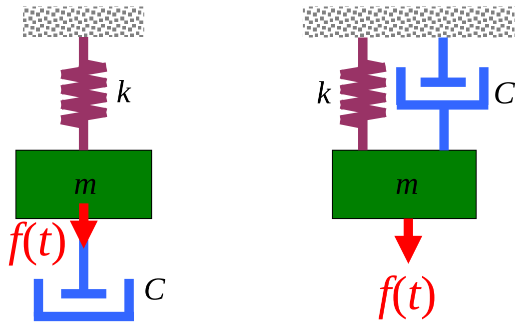
提要 274：Fourier 級數在強制振動問題上之應用

所謂的強制振動(*Forced Vibration*)，係指受外力作用的振動，如圖一所示：



圖一　強制振動問題示意圖

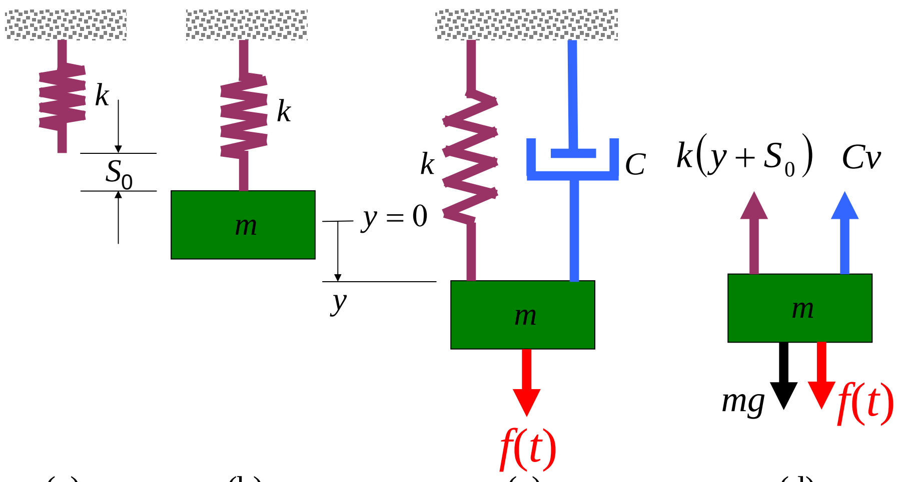
其中質量為 m 的物體受到一個向下之與時間有關的外力 $f(t)$，其上聯結一個彈簧，下方聯結一個阻尼器。彈簧因伸長縮短所引起的內力與位移的關係若考慮為線彈性關係，則彈簧之內力與伸長量成正比，其比例常數為彈簧的彈性常數(*Spring Constant*)k。通常置於流體中之圓盤所產生的阻力係與聯結於圓盤上之物體的運動速度成正比，其比例常數稱為阻尼係數(*Damping Coefficient*)C。圖一常簡化為如圖二之型式：



圖二　簡化之質點-彈簧-阻尼系統

■ 以下為強制振動問題數學模式建立過程之說明

茲將質量為 m 之物體取自由體圖(*Free Body Diagram*)，並以牛頓第二運動定律(Newton's Second Law)分析其受力後之運動行為，如下圖所示。



圖三　(a)彈簧未伸長；(b)彈簧產生靜態伸長量S_0；(c)彈簧產生動態伸長量 y；(d)以牛頓第二運動定律分析質量為 m 之物體的運動行為

由圖三(d)得知，其所產生之向下合力大小為 $f(t)+mg-k(y+S_0)-Cv$，又由牛頓第二運動定律 $\sum F = ma$ 知：

$$f(t)+mg-k(S_0+y)-Cv=ma \tag{1}$$

其中物體的運動速度 v 為物體位移量 (S_0+y) 對時間變數 t 的一次微分，亦即：

$$v=\frac{d(S_0+y)}{dt}=\frac{dS_0}{dt}+\frac{dy}{dt}=0+\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dt}$$

而物體的運動加速度 a 為物體位移量 (S_0+y) 對時間變數 t 的兩次微分，亦即：

$$a=\frac{d^2(S_0+y)}{dt^2}=\frac{d^2S_0}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=0+\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dt^2}$$

另外，由圖三(b)之靜力平衡知，物體處於靜態伸長時，物體所受重力 mg 係與彈簧的拉力 kS_0 相同，即 $mg=kS_0$。基於此，故式(1)亦可表為：

$$f(t)-ky-C\frac{dy}{dt}=m\frac{d^2y}{dt^2} \tag{2}$$

或

$$\boxed{m\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{dy}{dt}+ky=f(t)} \tag{3}$$

上式即為常見之強制振動問題的控制方程式，其本質上是牛頓第二運動定律的化身。

以上之研討方式僅與考慮物體之振動與時間變數 t 有關，實際上物體之振動亦與其空間之條件因素密切相關。例如若考慮振動之物體為房子，則房子是蓋在山坡地上、平地上、沙地上或岩盤上等，其因振動所引起損壞程度是完全不一樣的，這就說明了空間條件因素也很重要。為簡化問題起見，本單元暫不考慮空間條件因素的影響。

因只考慮時間之條件因素的影響，且微分方程式(3)為兩次微分，其通解中會包含兩個未知常數，故數學模式中通常會給予兩種與時間有關之條件，亦即物體之初始位置(*Initial Position*) y_0 和初始速度(*Initial Velocity*) v_0，因此問題之初始條件為：

$$\boxed{y(0)=y_0 \text{ 、 } \frac{dy(0)}{dt}=v_0} \tag{4}$$

式(3)與式(4)即構成強制振動問題之數學模式。

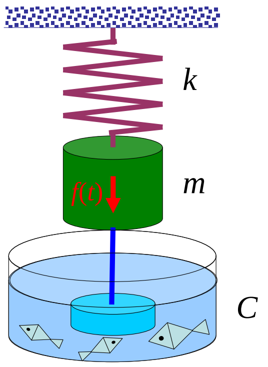
■ 以下為 Fourier 級數在強制振動問題數學模式上之應用說明

為清楚起見，茲再將式(3)與式(4)所示數學模式再重新整理一遍如以下所示：

- 控制方程式：$m\dfrac{d^2y}{dt^2}+C\dfrac{dy}{dt}+ky=f(t)$
- 初始條件：$y(0)=y_0$、$\dfrac{dy(0)}{dt}=v_0$

那麼 Fourier 級數究竟如何應用在強制振動問題上呢？請讀者回想一下提要 271 關於 Fourier 級數應用於樑之撓度問題的解析過程，在該問題中樑所受之外力荷重$q(x)$是被展開成 Fourier 級數之函數型態。同理，Fourier 級數應用在強制振動問題上時，主要還是用以表示作用於物體上之外力，茲以一例加以說明如下。

範例一
已知圖四所示強制振動問題中，物體之質量$m=1kg$，阻尼係數$C=0.02\,kgm/\sec$，彈簧的彈性常數$k=25\,N/m$，所受之外力 $f(t)=\begin{cases} t+\dfrac{\pi}{2}, & -\pi<t<0 \\ -t+\dfrac{\pi}{2}, & 0<t<\pi \end{cases}$、$f(t+2\pi)=f(t)$，試推求物體之振動位移量$y(t)$。



圖四　強制振動問題示意圖

解答：

雖然題目沒有清楚給予數學模式，但讀者應已有能力寫出問題之數學模式。由之前的研討知，問題之數學模式可表示如下：

- 控制方程式：$m\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{dy}{dt}+ky=f(t)$
- 初始條件：$y(0)=y_0$、$\frac{dy(0)}{dt}=v_0$

問題之解析應分成三個步驟，第一步驟是引用 Fourier 級數的概念表示作用之外力 $f(t)$，第二步驟是解出問題之通解，第三步驟是解出滿足初始條件之特解。

■ 第一步驟：引用 Fourier 級數的概念表示作用之外力 $f(t)$

已知週期為 2π 的函數 $f(t)$之 Fourier 級數如以下所示：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

其中

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{\pi}f(t)dt\right]\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)dt+\int_{0}^{\pi}\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)dt\right]\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{t^2}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)_{-\pi}^{0}+\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)_{0}^{\pi}\right]\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{0^2}{2}+\frac{\pi}{2}(0)-\frac{(-\pi)^2}{2}-\frac{\pi}{2}(-\pi)\right)+\left(-\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi}{2}(\pi)+\frac{0^2}{2}-\frac{\pi}{2}(0)\right)\right]\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[\left(-\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}\right)+\left(-\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}\right)\right]\\
&=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (偶函數)(偶函數)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (偶函數)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left(-t+\frac{\pi}{2}\right)\cos nt\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{t\sin nt}{n}-\frac{\cos nt}{n^2}+\frac{\pi}{2}\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{\pi\sin n\pi}{n}-\frac{\cos n\pi}{n^2}+\frac{\pi}{2}\frac{\sin n\pi}{n}\right)-\left(-\frac{(0)\sin(0)}{n}-\frac{\cos(0)}{n^2}+\frac{\pi}{2}\frac{\sin(0)}{n}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left(0-\frac{(-1)^n}{n^2}+0\right)-\left(0-\frac{1}{n^2}+0\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(-1)^n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right] \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (偶函數)(奇函數)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (奇函數)dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

所以

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]\cos nt=\frac{4}{\pi}\left(\cos t+\frac{1}{3^2}\cos 3t+\frac{1}{5^2}\cos 5t+\cdots\right)}$$

■ 第二步驟：解出問題之通解

目前問題之控制方程式可改寫為：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+0.02\frac{dy}{dt}+25y=\frac{4}{\pi}\left(\cos t+\frac{1}{3^2}\cos 3t+\frac{1}{5^2}\cos 5t+\cdots\right)$$

❶ 推求問題之齊性解 y_h

需由齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dt^2}+0.02\frac{dy}{dt}+25y=0$ 解出問題之齊性解。考慮 $y=e^{\lambda t}$，再代入齊性微分方程式中，則可得出：

$$\left(\lambda^2+0.02\lambda+25\right)e^{\lambda t}=0$$

因為 $y=e^{\lambda t}\neq 0$，所以 $\lambda^2+0.02\lambda+25=0$，由此可知 $\lambda=-0.01\pm 5i$，故問題之齊性解可表為：

$$y_h=C_1e^{(-0.01+5i)t}+C_2e^{(-0.01-5i)t}=e^{-0.01t}\left(A\cos 5t+B\sin 5t\right)$$

其中 $A=C_1+C_2$ 、 $B=C_1-iC_2$ 。

❷ 推求問題之非齊性解 y_p

需由原微分方程式 $\frac{d^2y}{dt^2}+0.02\frac{dy}{dt}+25y=\frac{4}{\pi}\left(\cos t+\frac{1}{3^2}\cos 3t+\frac{1}{5^2}\cos 5t+\cdots\right)$ 解出問題之非齊性解。可利用待定係數法中之相加的原則解出問題之非齊性解，亦即考慮：

$$y_p=\sum_{n=1,3,5,\cdots}\left(A_n\cos nt+B_n\sin nt\right)$$

代回原式：

$$\frac{d^2\left[\sum_{n=1,3,5,\cdots}\left(A_n\cos nt+B_n\sin nt\right)\right]}{dt^2}+0.02\frac{d\left[\sum_{n=1,3,5,\cdots}\left(A_n\cos nt+B_n\sin nt\right)\right]}{dt}$$
$$+25\left[\sum_{n=1,3,5,\cdots}\left(A_n\cos nt+B_n\sin nt\right)\right]=\frac{4}{\pi}\left(\cos t+\frac{1}{3^2}\cos 3t+\frac{1}{5^2}\cos 5t+\cdots\right)$$

整理後可知：

$$\sum_{n=1,3,5,\cdots}\left[\left(-n^2A_n+0.02nB_n+25A_n\right)\cos nt+\left(-n^2B_n-0.02nA_n+25B_n\right)\sin nt\right]$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\cos t+\frac{1}{3^2}\cos 3t+\frac{1}{5^2}\cos 5t+\cdots\right)$$

$$=\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{2}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]\cos nt$$

比較係數知：

$$\begin{cases}-n^2A_n+0.02nB_n+25A_n=\dfrac{2}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]\\ -n^2B_n-0.02nA_n+25B_n=0\end{cases}$$

解析以上兩式可知：

$$\begin{cases}A_n=\dfrac{4\left(25-n^2\right)}{n^2\pi\left[\left(25-n^2\right)^2+(0.02n)^2\right]}\\ B_n=\dfrac{0.08}{n\pi\left[\left(25-n^2\right)^2+(0.02n)^2\right]}\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}A_n=\dfrac{4\left(25-n^2\right)}{n^2\pi D}\\ B_n=\dfrac{0.08}{n\pi D}\end{cases}$$

其中 $D=\left(25-n^2\right)^2+(0.02n)^2$ 。基於此，問題之非齊性解可表為：

$$y_p=\sum_{n=1,3,5,\cdots}\left[\frac{4\left(25-n^2\right)}{n^2\pi D}\cos nt+\frac{0.08}{n\pi D}\sin nt\right]$$

由以上之研討知，問題之通解為：

$$\boxed{y=y_h+y_p=e^{-0.01t}\left(A\cos 5t+B\sin 5t\right)+\sum_{n=1,3,5,\cdots}\left[\frac{4\left(25-n^2\right)}{n^2\pi D}\cos nt+\frac{0.08}{n\pi D}\sin nt\right]}$$

其中 $D=\left(25-n^2\right)^2+(0.02n)^2$ 。

■ 第三步驟是解出滿足初始條件之特解

只要將問題之初始條件 $y(0)=y_0$ 、 $\dfrac{dy(0)}{dt}=v_0$ 代入所研討出之通解，即可求出通解中之兩個未知常數 A 、 B ，此一部分較為容易，請讀者自行解析。