提要 273：複數之 Fourier 級數(與角度變數有關)

有許多問題是與角度變化有關，因此其座標系統常捨棄卡氏座標，而採用圓柱座標(r,θ,z)或球體座標(r,θ,φ)，這是因為以此方式表示問題時較為清楚簡便。以此方式表示問題時，其中之變數θ等的定義域為$[0,2\pi]$，此一現象與前面所提週期函數之定義域大多不同，但與週期為2π之函數的 Fourier 級數有關，然需想辦法作適當之調整，說明如下。

函數 $f(x)$ 之複數 Fourier 級數
函數 $f(x)$之複數 Fourier 級數係定義為： $$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx} \qquad (1)$$ 其中 $$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx$$

證明：

可以三的步驟證明週期為2π之函數$f(x)$的複數 Fourier 級數的表示方式，說明如下。

❶第一步：首先將週期為2π之函數$f(x)$的 Fourier 級數寫出：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (2)$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\text{ ，}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\text{ ，}b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\text{ ，}n=1,2,3,\cdots\text{ 。}$$

❷第二步：引用尤拉公式(Euler Formula)$e^{\pm it}=\cos t\pm i\sin t$改寫正弦及餘弦函數，將式(2)作初步之調整：

因為$e^{\pm it}=\cos t\pm i\sin t$，所以

$$e^{inx}=\cos nx+i\sin nx \qquad (3a)$$

$$e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx \tag{3b}$$

式(3a)與式(3b)之和除以 2、暨式(3a)減式(3b)除以 2i 可得：

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) \tag{4a}$$

$$\sin nx = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) \tag{4b}$$

故

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= a_n\left[\frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)\right] + b_n\left[\frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)\right] \\ &= a_n\left[\frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)\right] + b_n\left[-\frac{i}{2}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right)e^{inx} + \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right)e^{-inx} \end{aligned} \tag{5}$$

茲令：

$$c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) \tag{6a}$$

$$k_n = \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) \tag{6b}$$

可得：

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n e^{inx} + k_n e^{-inx} \tag{7}$$

故式(2)可改寫為：

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{inx} + k_n e^{-inx}\right) \tag{8}$$

❸第三步：最後，調整係數 a_0、c_n、k_n，再將式(8)作最後之調整：

因為係數 c_n、k_n 可改寫為以下型態：

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_n &= \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx + i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right]e^{inx} + \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx\right]e^{-inx}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right]e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx\right]e^{-inx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right]e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right]e^{inx} \\
&= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\, e^{inx}\right]_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right]e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right]e^{inx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right]e^{inx}
\end{aligned}
$$

若考慮

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{9}$$

則其中之係數 $c_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$，故得證。

範例一

試求週期函數 $f(x)=\begin{cases} a, & 0<x<\pi \\ -a, & -\pi<x<0 \end{cases}$ 之複數 Fourier 級數，其中 $f(x+2\pi)=f(x)$。

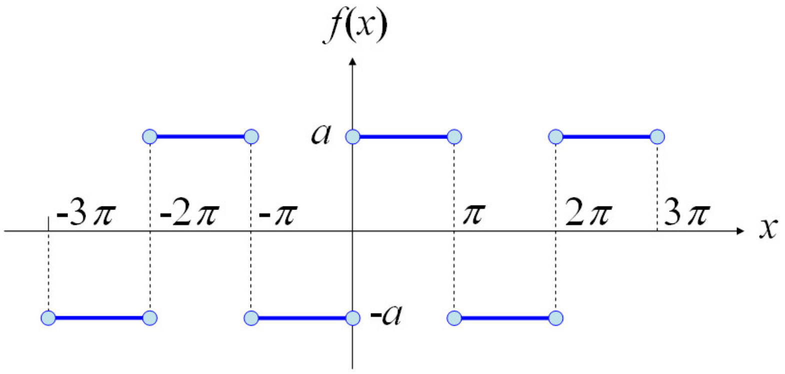

圖 1　週期函數 $f(x)$ 之圖形示意圖

解答：

由之前的解析得知，週期為 2π 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數可表為：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

其中係數

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-a)e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} (a)e^{-inx}dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[(-a)\left(\frac{e^{-inx}}{-in}\right)_{-\pi}^{0} + (a)\left(\frac{e^{-inx}}{-in}\right)_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[(-a)\left(\frac{e^{0}-e^{in\pi}}{-in}\right) + (a)\left(\frac{e^{-in\pi}-e^{0}}{-in}\right)\right] \\
&= -\frac{a}{2in\pi}\left[-\left(e^{0}-e^{in\pi}\right)+\left(e^{-in\pi}-e^{0}\right)\right] \\
&= -\frac{ia}{2i^2n\pi}\left\{-\left[1-(\cos n\pi + i\sin n\pi)\right]+\left[(\cos n\pi - i\sin n\pi)-1\right]\right\} \\
&= -\frac{ia}{2i^2n\pi}\left\{-\left[1-\cos n\pi\right]+\left[\cos n\pi - 1\right]\right\} \\
&= \frac{ia}{2n\pi}\left\{-\left[1-(-1)^n\right]+\left[(-1)^n-1\right]\right\} \\
&= \frac{ia}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]
\end{aligned}
$$

故函數 $f(x)$之複數 Fourier 級數可表為：

$$
\boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{ia}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]e^{inx}}
$$