提要 272：Fourier 級數在樑之撓度問題的應用

本單元係接續提要 270 及 271 所作之進一步的說明，用以完全瞭解半幅展開(Half-Range Expansion)之應用方式及其結果。

範例一

如圖 1 所示簡支承樑在 $[a,b]$ 範圍內受均佈荷重作用，其數學模式如以下所示，試計算出樑上各點的撓度(Deflection)。

- 控制方程式：$EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q(x)$ (1)
- 邊界條件：$y(0)=0$ (表樑之左端撓度為零)

  $y(L)=0$ (表樑之右端撓度為零)

  $EIy''(0)=0$ (表樑之左端彎矩為零)

  $EIy''(L)=0$ (表樑之右端彎矩為零)

其中 E 表樑之楊氏係數(Young's Modulus)；I 是樑之慣性矩(Moment of Inertia)；$q(x)$ 係作用於樑上之外力。

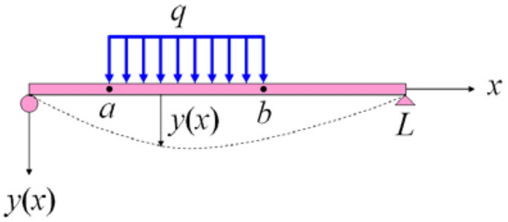

圖 1　樑在 $[a,b]$ 範圍內受均佈荷重作用示意圖

解答：

首先將將外力荷重 $q(x)$ 以奇函數半幅展開方式加以表示，則其展開後之圖形如以下所示：

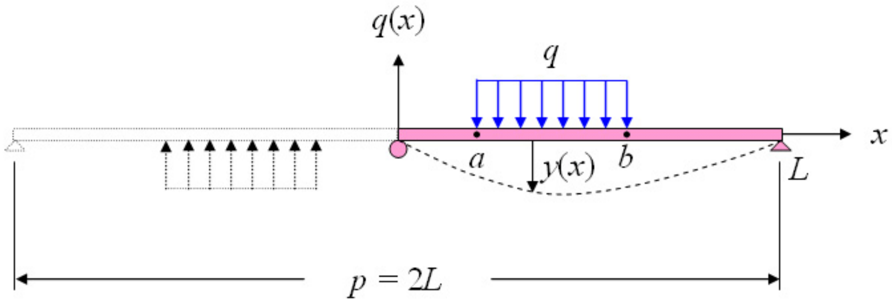

圖 2　以奇函數半幅展開觀念表示外力荷重$q(x)$

在本例中，外力荷重$q(x)$是擬以奇函數半幅展開方式加以表示，雖然吾人可以僅保留 Fourier 級數中之與奇函數相關之正弦函數部分，如式(2)所示：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{2}$$

但即使保留如式(3)所示之其他項次：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L}+b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3}$$

最後仍可得出相同結果。茲以式(3)說明$q(x)$之奇函數展開結果。

式(3)中之係數a_0與a_n應為零，說明如下：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}(\text{奇函數})dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(\text{奇函數})(\text{偶函數})dx \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(\text{奇函數})dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

其次，再推求係數b_n之值：

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} (\textit{奇函數})(\textit{奇函數})dx \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} (\textit{偶函數})dx \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} (\textit{偶函數})dx \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{2}{L}\left[\int_{0}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{a}^{b} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{b}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right] \\
&= \frac{2}{L}\left[\int_{0}^{a} (0)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{a}^{b} (q)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{b}^{L} (0)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right] \\
&= \frac{2}{L}\int_{a}^{b} (q)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{2q}{L}\left(-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)_a^b \\
&= -\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi b}{L} - \cos\frac{n\pi a}{L}\right) \\
&= \frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L} - \cos\frac{n\pi b}{L}\right)
\end{aligned}
$$

故外力荷重$q(x)$可表為：

$$
\boxed{q(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L} - \cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}} \tag{4}
$$

今問題之控制方程式可表為：

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{5}$$

上式通解(General Solution)之解析其實很簡單，只要直接對變數 x 作四次之積分，即可推求出問題之通解。

■ 式(5)第一次對變數 x 作積分：

$$\int EI\frac{d^4y}{dx^4}dx=\int\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}dx+C_1$$

故

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\left(-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)+C_1 \tag{6}$$

■ 式(6)再對變數 x 作積分：

$$\int EI\frac{d^3y}{dx^3}dx=\int\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\left(-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)+C_1\right\}dx+C_2$$

故

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\left(-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)+C_1x+C_2 \tag{7}$$

■ 式(7)再對變數 x 作積分：

$$\int EI\frac{d^2y}{dx^2}dx=\int\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\left(-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)+C_1x+C_2\right\}dx+C_3$$

故

$$EI\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\left(\frac{L^3}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3 \tag{8}$$

■ 式(8)再對變數 x 作積分：

$$\int EI\frac{dy}{dx}dx=\int\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\left(\frac{L^3}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3\right\}dx+C_4$$

故

$$EIy=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\left(\frac{L^4}{n^4\pi^4}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)+\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4$$

上式可繼續改寫為：

$$\boxed{y=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2qL^4}{n^5\pi^5EI}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4\right)} \qquad (9)$$

上式為問題之級數解，其中包含四個積分常數，這四個積分常數可以根據問題所給之邊界條件推導出來，茲將問題所示之邊界條件分別代入式(7)與式(9)中：

■ 將 $y(0)=0$ 代入式(9)：

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2qL^4}{n^5\pi^5EI}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\sin\frac{n\pi(0)}{L}+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}C_1(0)^3+\frac{1}{2}C_2(0)^2+C_3(0)+C_4\right)$$

整理後可知：

$$C_4=0 \qquad (10a)$$

■ 將 $y(L)=0$ 代入式(9)：

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2qL^4}{n^5\pi^5EI}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\sin\frac{n\pi L}{L}+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}C_1L^3+\frac{1}{2}C_2L^2+C_3L+C_4\right)$$

整理後可知：

$$\frac{1}{6}C_1L^3+\frac{1}{2}C_2L^2+C_3L+C_4=0 \tag{10b}$$

■ 將 $EIy''(0)=0$ 代入式(7)：

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\left(-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi(0)}{L}\right)+C_1(0)+C_2$$

整理後可知：

$$C_2=0 \tag{10c}$$

■ 將 $EIy''(L)=0$ 代入式(7)：

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\left(-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi L}{L}\right)+C_1L+C_2$$

整理後可知：

$$C_1L+C_2=0 \tag{10d}$$

最後，由式(10a)-(10d)知，$C_1=C_2=C_3=C_4=0$，故滿足邊界條件之問題的特解(Particular Solution)之級數解可表為：

$$\boxed{y=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2qL^4}{n^5\pi^5EI}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}} \tag{11}$$

附註：以上問題之解只要取少數項即具有相當之準確度。例如，若考慮整個樑都受均佈荷重作用，則首先可考慮 $a=0$、$b=L$，基於此，式(11)可改寫為：

$$\boxed{y=\frac{2qL^4}{\pi^5EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left[\cos 0-\cos(n\pi)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}} \tag{12}$$

而樑都受均佈荷重作用時，其中點之撓度已知其值為$\dfrac{5qL^4}{384EI}$。而由式(12)所計算出之樑中點的撓度之級數解為：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
y\left(\frac{L}{2}\right) &= \frac{2qL^4}{\pi^5 EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left[1-(-1)^n\right]\sin\frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{2qL^4}{\pi^5 EI}\left\{2-\frac{0}{2^5}+\frac{2}{3^5}-\frac{0}{4^5}+\frac{2}{5^5}-\frac{0}{6^5}+\frac{2}{7^5}-+\cdots\right\} \\
&= \frac{4qL^4}{\pi^5 EI}\left\{1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\cdots\right\}
\end{aligned}
}
$$

若取第一項作觀察，則$y\left(\dfrac{L}{2}\right)\cong\dfrac{4qL^4}{\pi^5 EI}$，其誤差百分比為：

$$
\left|\frac{\dfrac{5qL^4}{384EI}-\dfrac{4qL^4}{\pi^5 EI}}{\dfrac{5qL^4}{384EI}}\right|\times 100\% = 0.386\%
$$

由此可知，以 Fourier 級數的概念作外力之半幅展開後所計算出之結果相當精確。但讀者還需了解一個重點，就是外力之半幅展開方式有兩種，而究竟是採用奇函數之半幅展開亦或是偶函數之半幅展開較為合適，則需觀察問題之邊界條件或初始條件。因本題之邊界條件均為零，故以採用奇函數之半幅展開較為合適，因奇函數在端點之值亦為零，以此方式所計算出之撓度解僅需取一項，其解就已非常精準。若讀者無從判斷究竟是採用奇函數之半幅展開亦或是偶函數之半幅展開較為合適，也沒有關係。以本題為例，若是採用偶函數之半幅展開表示外力荷重q，則所推導出之樑的撓度之級數解只要多取幾項亦可得到相當精確之結果。