

提要 271：偶函數之半幅展開(Half-Range Expansion)

茲以一例說明偶函數半幅展開之應用方式。

範例一

如圖 1 所示樑在 $[a, b]$ 範圍內受均佈荷重作用，試將其外力荷重訊息以偶函數之半幅展開方式加以表示。

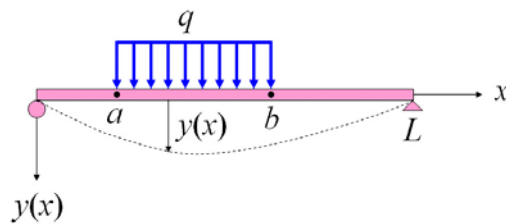


圖 1 樑在 $[a, b]$ 範圍內受均佈荷重作用示意圖

解答：

首先將問題之控制方程式完整呈現如下：

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) \quad (1)$$

其中 E 表樑之楊氏係數(Young's Modulus)； I 是樑之慣性矩(Moment of Inertia)； $q(x)$ 係作用於樑上之外力。

今欲將外力荷重 $q(x)$ 以奇函數半幅展開方式加以表示，則其展開後之圖形如以下所示：

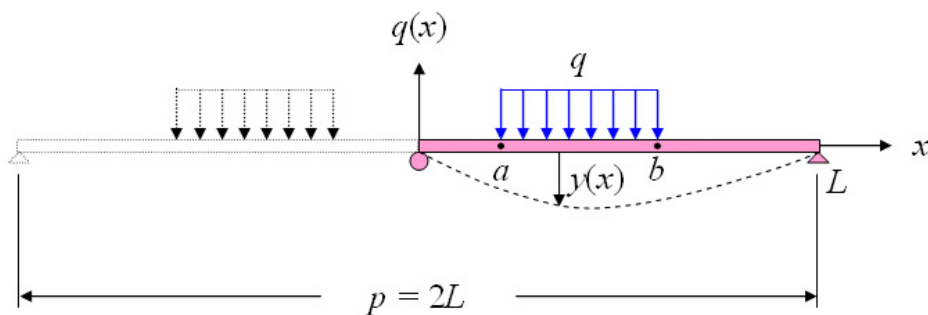


圖 2 以偶函數半幅展開觀念表示外力荷重 $q(x)$

在本例中，外力荷重 $q(x)$ 是擬以偶函數半幅展開方式加以表示，雖然吾人可以僅保留 Fourier 級數中之與奇函數相關之正弦函數部分，如式(2)所示：

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (2)$$

但即使保留如式(3)所示之其他項次：

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3)$$

最後仍可得出相同結果。茲以式(3)說明問題之解。

式(3)中之係數 b_n 應為零，證明如下：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L (\text{偶函數})(\text{奇函數}) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L (\text{奇函數}) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

其次，再推求係數 a_0 、 a_n 之值：

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L (\text{偶函數}) dx \\
&= \frac{2}{2L} \int_0^L (\text{偶函數}) dx \\
&= \frac{1}{L} \left[\int_0^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \int_b^L f(x) dx \right] \\
&= \frac{1}{L} \left[\int_0^a (0) dx + \int_a^b (q) dx + \int_b^L (0) dx \right] \\
&= \frac{1}{L} \int_a^b (q) dx \\
&= \frac{q}{L} (b-a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= \frac{1}{L} \int_{-L}^L (\text{偶函數})(\text{偶函數}) dx \\
&= \frac{1}{L} \int_{-L}^L (\text{偶函數}) dx \\
&= \frac{2}{L} \int_0^L (\text{偶函數}) dx \\
&= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= \frac{2}{L} \left[\int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_b^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\
&= \frac{2}{L} \left[\int_0^a (0) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_a^b (q) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_b^L (0) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\
&= \frac{2}{L} \int_a^b (q) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= \frac{2q}{L} \left(\frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \right)_a^b \\
&= \frac{2q}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi b}{L} - \sin \frac{n\pi a}{L} \right)
\end{aligned}$$

故外力荷重 $q(x)$ 可表為：

$$q(x) = \frac{q}{L}(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2q}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi b}{L} - \sin \frac{n\pi a}{L} \right) \right] \cos \frac{n\pi x}{L}$$

附註：在前一提要及本提要中，分別呈現兩種不同型態之外力展開方式，但實際上以將外力荷重作奇函數展開所得出之樑的撓度較方便快速。因為題意所示之樑為簡支承樑，其在邊界上之撓度為零，而以正弦函數模擬 $q(x)$ 時，正弦函數在端點之值亦為零，將來所推求出之樑的撓度 $y(x)$ 僅需選取較少之項次即可得出非常近似之結果，下一提要會加以解釋。