提要 270：奇函數之半幅展開(Half-Range Expansion)

茲以一例說明奇函數半幅展開之應用方式。

範例一

如圖 1 所示樑在$[a,b]$範圍內受均佈荷重作用，試將其外力荷重訊息以奇函數之半幅展開方式加以表示。

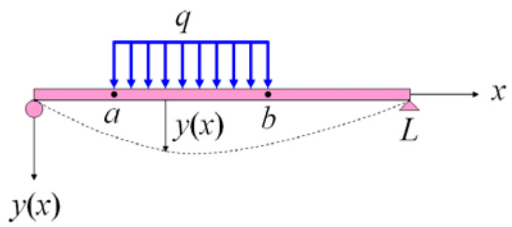

圖 1　樑在$[a,b]$範圍內受均佈荷重作用示意圖

解答：

首先將問題之控制方程式完整呈現如下：

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=q(x) \tag{1}$$

其中 E 表樑之楊氏係數(Young's Modulus)；I 是樑之慣性矩(Moment of Inertia)；$q(x)$ 係作用於樑上之外力。

今欲將外力荷重 $q(x)$ 以奇函數半幅展開方式加以表示，則其展開後之圖形如以下所示：

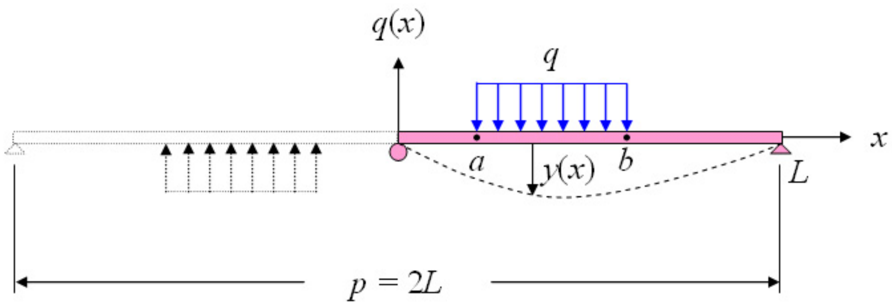

圖 2　以奇函數半幅展開觀念表示外力荷重 $q(x)$

在本例中，外力荷重$q(x)$是擬以奇函數半幅展開方式加以表示，雖然吾人可以僅保留 Fourier 級數中之與奇函數相關之正弦函數部分，如式(2)所示：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{2}$$

但即使保留如式(3)所示之其他項次：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3}$$

最後仍可得出相同結果。茲以式(3)說明問題之解。

式(3)中之係數a_0與a_n應為零，證明如下：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}(\text{奇函數})dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(\text{奇函數})(\text{偶函數})dx \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(\text{奇函數})dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

其次，再推求係數b_n之值：

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(奇函數)(奇函數)dx \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(偶函數)dx \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{L}(偶函數)dx \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{2}{L}\left[\int_{0}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx+\int_{a}^{b} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx+\int_{b}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right] \\
&= \frac{2}{L}\left[\int_{0}^{a}(0)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx+\int_{a}^{b}(q)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx+\int_{b}^{L}(0)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right] \\
&= \frac{2}{L}\int_{a}^{b}(q)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{2q}{L}\left(-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)_a^b \\
&= -\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi b}{L}-\cos\frac{n\pi a}{L}\right) \\
&= \frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)
\end{aligned}
$$

故外力荷重$q(x)$可表為：

$$
\boxed{q(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2q}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi a}{L}-\cos\frac{n\pi b}{L}\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}}
$$