提要 268：奇函數與偶函數之應用

在提要 260 中，曾探討以下所示函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數，今再引用奇函數與偶函數之相關概念，說明較簡易之解析方式。

範例一

試求週期函數 $f(x)=\begin{cases} a, & 0<x<\pi \\ -a, & -\pi<x<0 \end{cases}$ 之 Fourier 級數，其中 $f(x+2\pi)=f(x)$。

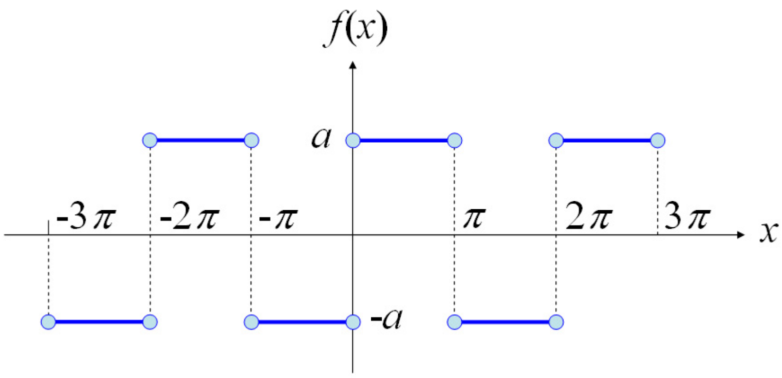

圖 1　週期為 2π 的函數 $f(x)$ 之圖形示意圖

解答❶ -- 不考慮函數 $f(x)$之奇函數或偶函數的特性

由定義知，週期為 2π的函數 $f(x)$之 Fourier 級數可表為：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

其中係數

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-a)dx + \int_{0}^{\pi} (a)dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-ax\Big|_{-\pi}^{0} + ax\Big|_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\{-a[0-(-\pi)]+a[\pi-0]\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-a)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} (a)\cos nx dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-a\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + a\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-a\frac{\sin 0-\sin(-n\pi)}{n} + a\frac{\sin n\pi-\sin 0}{n}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-a)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} (a)\sin nx dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[a\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - a\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[a\frac{\cos 0-\cos(-n\pi)}{n} - a\frac{\cos n\pi-\cos 0}{n}\right] \\
&= \frac{2a}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]
\end{aligned}
$$

故函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數可表為：

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\sin nx=\frac{4a}{\pi}\sin x+\frac{4a}{3\pi}\sin 3x+\frac{4a}{5\pi}\sin 5x+\cdots}$$

解答❷ -- 考慮函數 $f(x)$ 之奇函數或偶函數的特性

由題意知，函數 $f(x)$ 是奇函數；另外，國中階段應該就知道正弦函數 $\sin nx$ 是反對稱函數、餘弦函數 $\cos nx$ 是對稱函數，亦即 $\sin nx$ 是奇函數、$\cos nx$ 是偶函數。故在 Fourier 級數之係數的計算上，可以較快得出所擬計算之結果，說明如下：

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{奇函數})dx\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{奇函數})(\text{偶函數})dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{奇函數})dx\\&=0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\textit{奇函數})(\textit{奇函數}) dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\textit{偶函數}) dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\textit{偶函數}) dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (a)\sin nx dx \\
&= \frac{2a}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{2a}{\pi}\left[-\frac{\cos n\pi - \cos 0}{n}\right] \\
&= \frac{2a}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]
\end{aligned}
$$

所計算出之 Fourier 級數的係數仍與方法❶相同，故函數 $f(x)$之 Fourier 級數仍可表為：

$$
\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\sin nx = \frac{4a}{\pi}\sin x + \frac{4a}{3\pi}\sin 3x + \frac{4a}{5\pi}\sin 5x + \cdots}
$$

讀者應能體會出第❷種解法確實具有較快速之優點。