提要 266：特別的提醒 -- 在特定點的 Fourier 級數之函數值

有一種特別的考法，其題目是問函數 $f(x)$ 在特定點的 Fourier 級數之函數值。因為這一類問題的題目一定會給函數 $f(x)$ 的函數型態，而函數 $f(x)$ 的 Fourier 級數與函數 $f(x)$ 是完全對應且相同的，因此若題目是問函數 $f(x)$ 在特定點的 Fourier 級數之函數值，其實可以跳過 $f(x)$ 的 Fourier 級數之繁瑣過程的推導，直接以 $f(x)$ 推求特定點之函數值。若是遇到斷點，則應取其左極限與右極限的函數值之平均值。

範例一
試求週期函數 $f(x)=\begin{cases} 2a, & 0<x<\pi \\ -a, & -\pi<x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$、$\pi/2$、π、2π 之 Fourier 級數的函數值，其中 $f(x+2\pi)=f(x)$。

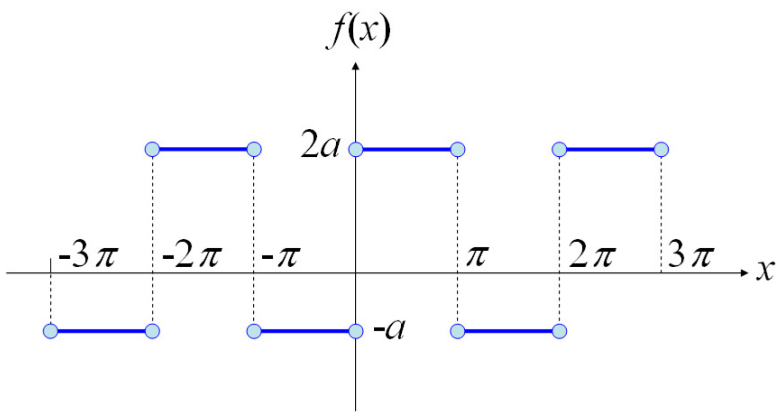

圖 1　週期函數 $f(x)$ 之圖形示意圖

解答：

由上圖知，$x=0$、π、2π 是函數 $f(x)$ 的斷點，而 $x=\pi/2$ 是函數 $f(x)$ 的連續點。因是擬計算出函數 $f(x)$ 在特定點的函數值，故並不需要推求出連續點之 Fourier 級數，只需瞭解如圖 1 所示函數 $f(x)$ 的圖形，再找出特定點所對應的函數值即可。基於此，函數 $f(x)$ 在連續點 $x=\pi/2$ 之 Fourier 級數的函數值為：

$$\boxed{f(\pi/2)=2a}$$

而函數 $f(x)$ 在斷點 $x=0$、π、2π 之 Fourier 級數的函數值為：

$$\boxed{f(0)=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{-a+2a}{2}=\frac{a}{2}}$$

$$\boxed{f(\pi)=\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{2a+(-a)}{2}=\frac{a}{2}}$$

$$\boxed{f(2\pi)=\frac{f(2\pi^-)+f(2\pi^+)}{2}=\frac{(-a)+2a}{2}=\frac{a}{2}}$$

附註：函數 $f(x)$在斷點 0、π、2π 等並沒有定義其所對應之數值，但函數 $f(x)$之 Fourier 級數在斷點 0、π、2π 卻有定義其所對應之數值！