

提要 265：特別的提醒 -- 在斷點位置上的 Fourier 級數

之前的介紹，都是針對函數 $f(x)$ 之連續點的 Fourier 級數加以說明，但是對於函數 $f(x)$ 之斷點 x_0 而言，其 Fourier 級數有特別的定義，亦即需取斷點之左極限與右極限的平均值，說明如下。

函數 $f(x)$ 在斷點 x_0 之 Fourier 級數

函數 $f(x)$ 在斷點 x_0 之 Fourier 級數是定義成該點之左極限與右極限的平均值，亦即：

$$f(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} \quad (1)$$

根據筆者之教學經驗，很多讀者都不相信上面這種講法，而一直認定是級數型態的表示方式才是對的，其實不然，讀者應謹慎留意。

範例一

試求週期函數 $f(x) = \begin{cases} a, & 0 < x < \pi \\ -a, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 之 Fourier 級數，其中 $f(x+2\pi) = f(x)$ 。

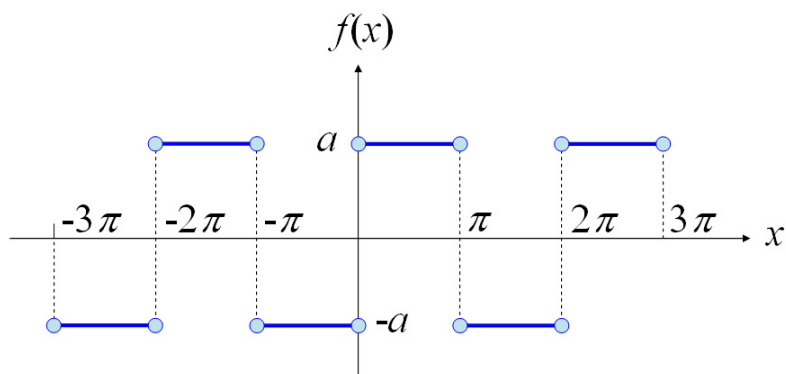


圖 1 週期函數 $f(x)$ 之圖形示意圖

解答：

因為 $x=0$ 是函數 $f(x)$ 的斷點，故根據定義，函數 $f(x)$ 在斷點之 Fourier 級數應表為：

$$f(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-a + a}{2} = 0$$