提要 264：Laplace 積分轉換的由來(中原土研考過)

函數 $g(t)$ 之 Laplace 積分轉換及反轉換之定義如以下所示：

函數 $g(t)$ 之 Laplace 轉換及反轉換
函數 $g(t)$ 之 Laplace 積分轉換是定義為： $$G(s)=\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt \quad (1)$$ 其中函數 $G(s)$ 之 Laplace 積分反轉換則定義為： $$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}G(s)e^{st}ds \quad (1')$$

證明：

擬分成三個步驟加以證明。

■ 第一步：寫出 Fourier 轉換之定義式

已知週期為∞的函數 $f(x)$之 Fourier 轉換定義如以下所示：

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \tag{2}$$

其中 $F(\omega)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$。因此，函數 $f(x)$之 Fourier 轉換可表為：

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\right]e^{i\omega x}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\right]e^{i\omega x}d\omega\end{aligned} \tag{3}$$

■ 第二步：將函數 *f*(*x*)考慮為 *x* < 0 時之函數值為零

亦即令：

$$f(x)=\begin{cases} f(x), & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \tag{4}$$

則式(3)可改寫為：

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right]e^{i\omega x}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{0} f(x)e^{-i\omega x}dx+\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right]e^{i\omega x}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{0} (0)e^{-i\omega x}dx+\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right]e^{i\omega x}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right]e^{i\omega x}d\omega \end{aligned} \tag{5}$$

■ 第三步：將變數符號 *x* 換成符號 *t*，且將函數 *f*(*x*)考慮成指數衰減的函數

亦即，令：

$$f(x)\equiv f(t)=g(t)e^{-at},\quad t\ge 0 \tag{6}$$

則式(5)可改寫為：

$$\begin{aligned} g(t)e^{-at} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right]e^{i\omega x}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} g(t)e^{-at}e^{-i\omega t}dt\right]e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} g(t)e^{-(a+i\omega)t}dt\right]e^{i\omega t}d\omega \end{aligned} \tag{7}$$

再作變數變換，令：

$$s=a+i\omega \tag{8}$$

則當舊的積分上限$\omega=\infty$時，新的積分上限$s=a+i\infty$；且當舊的積分下限$\omega=-\infty$時，

新的積分下限$s=a-i\infty$。另外，$\omega=\dfrac{s-a}{i}$、$d\omega=\dfrac{ds}{i}$。基於此，式(7)可改寫為：

$$\begin{aligned}
g(t)e^{-at} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty}g(t)e^{-(a+i\omega)t}dt\right]e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left[\int_{0}^{\infty}g(t)e^{-st}dt\right]e^{it\left(\frac{s-a}{i}\right)}\left(\frac{ds}{i}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left[\int_{0}^{\infty}g(t)e^{-st}dt\right]e^{t(s-a)}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left[\int_{0}^{\infty}g(t)e^{-st}dt\right]e^{st}e^{-at}ds \\
&= \frac{e^{-at}}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left[\int_{0}^{\infty}g(t)e^{-st}dt\right]e^{st}ds
\end{aligned} \tag{9}$$

故上式可再化簡為：

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left[\int_{0}^{\infty}g(t)e^{-st}dt\right]e^{st}ds \tag{10}$$

其中$\int_{0}^{\infty}g(t)e^{-st}dt$稱為函數$g(t)$之 Laplace 積分轉換，通常以符號$G(s)$加以表示，也就是常見之函數$g(t)$的 Laplace 積分轉換的定義之寫法：

$$\boxed{G(s)=\int_{0}^{\infty}g(t)e^{-st}dt} \tag{11}$$

而式(10)以$G(s)$加以改寫後，就稱之為函數$G(s)$的 Laplace 積分反轉換：

$$\boxed{g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}G(s)e^{st}ds} \tag{12}$$

故得證。