提要 263：週期為∞的 Fourier 級數(或稱之為 Fourier 轉換)

週期為∞的函數 $f(x)$ 之 Fourier 積分亦常再加以整理，而將新的整理則稱為複數 Fourier 積分或 Fourier 轉換，如以下所示：

週期為 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 轉換
週期為 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 轉換是定義為： $$f(x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \quad (1)$$ 其中 $$F(\omega)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx \quad (2)$$

證明：

已知週期為∞之函數 $f(x)$的 Fourier 積分可表為：

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega \tag{3}$$

其中

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega xdx \text{、} B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega xdx \text{。} \tag{4}$$

可以三個步驟證明週期為∞之函數 $f(x)$ 的複數 Fourier 積分的表示方式，說明如下。

❶第一步：首先將式(4)中之變數符號 x 換成 v，故式(3)可改寫為：

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos\omega vdv\cos\omega x+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin\omega vdv\sin\omega x\right]d\omega \tag{5}$$

其中僅 $A(\omega)$ 與 $B(\omega)$ 部分之積分變數符號有由 x 調整為 v，其他與變數 x 相關之項次並不需要調整。

❷第二步：式(5)再作適當之化簡，即：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos\omega v dv\cos\omega x + \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin\omega v dv\sin\omega x\right]d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos\omega v\cos\omega x dv + \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin\omega v\sin\omega x dv\right]d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)(\cos\omega v\cos\omega x + \sin\omega v\sin\omega x)dv\right]d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(\omega v - \omega x)dv\right]d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} f(v)\cos(\omega v - \omega x)d\omega\right]dv
\end{aligned}
\tag{6}
$$

其中積分式 $\int_{0}^{\infty} f(v)\cos(\omega v - \omega x)d\omega$ 是對變數 ω 之積分，故僅與變數 v 有關之函數 $f(v)$ 可以不用參加對變數 ω 的積分，因此：

$$\int_{0}^{\infty} f(v)\cos(\omega v - \omega x)d\omega = f(v)\int_{0}^{\infty}\cos(\omega v - \omega x)d\omega$$

因為 $\cos(\omega v - \omega x)$ 是一個偶函數(Even Function)，故當其積分範圍擴大一倍變為 $(-\infty,\infty)$ 時，其積分值應除以 2，亦即：

$$\int_{0}^{\infty} f(v)\cos(\omega v - \omega x)d\omega = f(v)\int_{0}^{\infty}\cos(\omega v - \omega x)d\omega = \frac{1}{2}f(v)\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega v - \omega x)d\omega$$

基於此，式(6)可改寫為：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(v)\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega v-\omega x)d\omega\right]dv \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega v-\omega x)d\omega\right]dv
\end{aligned}
\tag{7}
$$

❸第三步：再加上積分式 $i\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega v-\omega x)d\omega\right]dv$ 之積分值：

因 $\sin(\omega v-\omega x)$ 是一個奇函數(Odd Function)，故包含對稱區域 $(-\infty,\infty)$ 之積分式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega v-\omega x)d\omega$ 的積分值為零，又因其積分值已為零，即使再作其他之運算所得之積分值仍是零，亦即：

$$
i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega v-\omega x)d\omega\right]dv = 0 \tag{8}
$$

將式(8)所示之零加進式(7)中，則：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega v-\omega x)d\omega\right]dv + 0 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega v-\omega x)d\omega\right]dv + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega v-\omega x)d\omega\right]dv \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos(\omega v-\omega x)+i\sin(\omega v-\omega x)\right]d\omega\right\}dv
\end{aligned}
\tag{9}
$$

因為 $\cos(\omega v-\omega x)=\cos(\omega x-\omega v)$，且 $i\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega x-\omega v)d\omega\right]dv = 0$，所以式(9)亦可表為：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega x-\omega v)d\omega\right]dv+0 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega x-\omega v)d\omega\right]dv+i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega x-\omega v)d\omega\right]dv \qquad (9') \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos(\omega x-\omega v)+i\sin(\omega x-\omega v)\right]d\omega\right\}dv
\end{aligned}
$$

由尤拉公式(Euler Formula)知：

$$
\cos(\omega v-\omega x)+i\sin(\omega v-\omega x)=e^{i(\omega v-\omega x)}=e^{i\omega v}e^{-i\omega x} \qquad (10)
$$

故式(9)可進一步改寫為：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega v-\omega x)}d\omega\right\}dv \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega v}e^{-i\omega x}d\omega\right\}dv \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(v)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega v}e^{-i\omega x}d\omega\right\}dv \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega v}e^{-i\omega x}d\omega\right\}dv \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega v}e^{-i\omega x}dv\right\}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega v}dv\right\}e^{-i\omega x}d\omega \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega v}dv\right\}e^{-i\omega x}d\omega \qquad (11)
\end{aligned}
$$

若令：

$$
F(\omega)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega v}dv \qquad (12)
$$

則

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega \tag{13}$$

式(12)稱為函數 $f(x)$之複數 Fourier 積分或 Fourier 轉換，式(13)則稱之為函數 $F(\omega)$之 Fourier 反轉換。

若引用式(9')作討論，則函數 $f(x)$之複數 Fourier 積分或 Fourier 轉換應表為：

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{-i\omega v}dv \tag{12'}$$

而函數 $F(\omega)$之 Fourier 反轉換應表為：

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \tag{13'}$$

範例一

試求週期為∞之函數 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 之 Fourier 轉換。

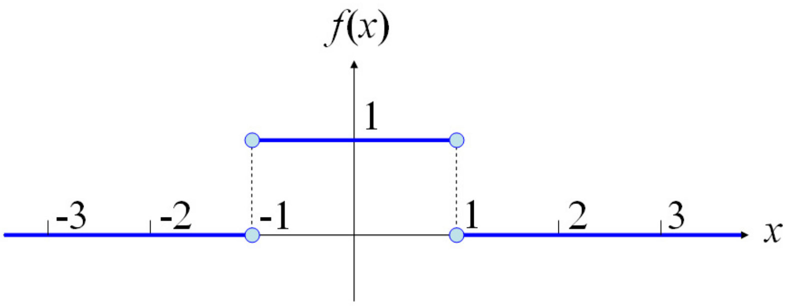

圖 1　題意所示週期為∞之函數 $f(x)$ 的示意圖

解答：

根據式(12)的推導知，函數 $f(x)$ 之 Fourier 轉換係定義為：

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\omega v}dv$$

故：

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{-1} f(v)e^{i\omega v}dv + \int_{-1}^{1} f(v)e^{i\omega v}dv + \int_{1}^{\infty} f(v)e^{i\omega v}dv\right] \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{-1} f(v)e^{i\omega v}dv + \int_{-1}^{1} f(v)e^{i\omega v}dv + \int_{1}^{\infty} f(v)e^{i\omega v}dv\right] \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{-1}(0)e^{i\omega v}dv + \int_{-1}^{1}(1)e^{i\omega v}dv + \int_{1}^{\infty}(0)e^{i\omega v}dv\right] \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{i\omega v}dv \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left.\frac{e^{i\omega v}}{i\omega}\right|_{-1}^{1} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{i\omega}\right] \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[\frac{(\cos\omega + i\sin\omega) - (\cos\omega - i\sin\omega)}{i\omega}\right] \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[\frac{i2\sin\omega}{i\omega}\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}
\end{aligned}
$$

附註：因為函數 $f(x)$ 之 Fourier 轉換有許多種定義，故實際上其結果會有多種不同的型態。