提要 262：週期為∞的 Fourier 級數(或稱之為 Fourier 積分)

根據週期為 $2L$ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數，即可建立週期為 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數，又因其級數型態已被改寫為積分型態，故週期為 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數通常改稱之為 Fourier 積分。週期為 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 積分可表示為：

週期為 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 積分

週期為 ∞ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 積分係定義為：

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega \tag{1}$$

其中

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx$$

證明：

已知週期為 $2L$ 之函數 $f(x)$的 Fourier 級數可表為：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2}$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx\text{，}a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\text{，}b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\text{，}n=1,2,3,\cdots\text{。} \tag{3}$$

可以三個步驟證明週期為∞之函數 $f(x)$ 的 Fourier 積分的表示方式，說明如下。

❶第一步：首先將式(3)中之變數符號 x 換成 v，故式(2)可改寫為：

$$f(x)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(v)dv+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(v)\cos\frac{n\pi v}{L}dv\right)\cos\frac{n\pi x}{L}+\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(v)\sin\frac{n\pi v}{L}dv\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\right] \quad (4)$$

其中僅係數部分之積分變數符號有由 x 調整為 v,其他與變數 x 相關之項次並不需要調整。

❷第二步：再作適當之變數變換，即令：

$$\omega=\frac{n\pi}{L} \quad (5)$$

故式(4)可改寫為：

$$f(x)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(v)dv+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(v)\cos\omega v dv\right)\cos\omega x+\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(v)\sin\omega v dv\right)\sin\omega x\right] \quad (6)$$

❸第三步：再令 $L\to\infty$：

當 $L\to\infty$ 時，若考慮 $\lim\limits_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}f(v)dv=$ 有限值 ，則

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(v)dv=\left(\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\right)\left(\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}f(v)dv\right)=\left(\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\right)(\text{有限值})=0\text{ 。} \quad (7)$$

另外，由式(5)知：

$$\Delta\omega=\Delta\left(\frac{n\pi}{L}\right)=\frac{(n+1)\pi}{L}-\frac{n\pi}{L}=\frac{\pi}{L} \quad (8)$$

故

$$\frac{1}{L}=\frac{\Delta\omega}{\pi} \quad (9)$$

基於此，式(6)可改寫為：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{L\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\Delta\omega}{\pi}\int_{-L}^{L} f(v)\cos\omega v dv\right)\cos\omega x+\left(\frac{\Delta\omega}{\pi}\int_{-L}^{L} f(v)\sin\omega v dv\right)\sin\omega x\right] \\
&= \lim_{L\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(v)\cos\omega v dv\right)\cos\omega x+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(v)\sin\omega v dv\right)\sin\omega x\right]\Delta\omega \qquad (10)\\
&= \int_{0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos\omega v dv\right)\cos\omega x+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin\omega v dv\right)\sin\omega x\right]d\omega
\end{aligned}
$$

可令：

$$
A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos\omega v dv=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx\text{，} \qquad (11a)
$$

$$
B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin\omega v dv=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx\text{，} \qquad (11b)
$$

故式(10)可進一步調整為：

$$
f(x)=\int_{0}^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega \qquad (12)
$$

式(11a)、(11b)、(12)即為所欲證出之週期為∞之函數$f(x)$的 Fourier 積分，故得證。

範例一

試求週期為∞之函數 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 之 Fourier 積分。

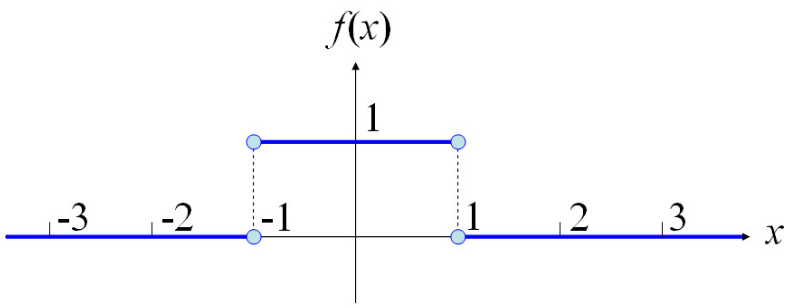

圖 1　題意所示週期為∞之函數 $f(x)$ 的示意圖

解答：

由之前的推導得知，週期為∞的函數 $f(x)$之 Fourier 積分可表為：

$$f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega$$

其中 $A(\omega)$與 $B(\omega)$分別定義為：

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos\omega v dv=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin\omega v dv=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx$$

故

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-1} f(x)\cos\omega x dx + \int_{-1}^{1} f(x)\cos\omega x dx + \int_{1}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-1} (0)\cos\omega x dx + \int_{-1}^{1} (1)\cos\omega x dx + \int_{1}^{\infty} (0)\cos\omega x dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\omega x dx \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\sin\omega x}{\omega}\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{\sin\omega - \sin(-\omega)}{\pi\omega} \\
&= \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-1} f(x)\sin\omega x dx + \int_{-1}^{1} f(x)\sin\omega x dx + \int_{1}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-1} (0)\sin\omega x dx + \int_{-1}^{1} (1)\sin\omega x dx + \int_{1}^{\infty} (0)\sin\omega x dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin\omega x dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\frac{\cos\omega x}{\omega}\Big|_{-1}^{1} \\
&= -\frac{\cos\omega - \cos(-\omega)}{\pi\omega} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以函數 $f(x)$ 之 Fourier 積分為：

$$
\boxed{f(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}\cos\omega x \, d\omega}
$$