提要 261：週期為 $2L$ 的 Fourier 級數

根據週期為 2π 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數，即可建立週期為 $2L$ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數，說明如下。已知週期為 2π 之函數 $f(x)$ 的 Fourier 級數可表為：

週期為 2π 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數

週期為 2π 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數係定義為：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\text{，}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\text{，}b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\text{，}n=1,2,3,\cdots\text{。}$$

而週期為 $2L$ 之函數 $f(x)$ 的 Fourier 級數可表為：

週期為 $2L$ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數

週期為 $2L$ 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數係定義為：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1'}$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx\text{，}a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\text{，}b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\text{，}n=1,2,3,\cdots\text{。}$$

證明：

可以三的步驟證明週期為 $2L$ 之函數 $f(x)$ 的 Fourier 級數的表示方式，說明如下。

❶第一步：首先將式(1)中之變數符號 x 換成 v，故式(1)可改寫為：

$$f(v)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nv+b_n\sin nv\right) \tag{2}$$

其中

$a_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(v)dv$，$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(v)\cos nvdv$，$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(v)\sin nvdv$，$n=1,2,3,\cdots$。

❷第二步：再作適當之變數變換，即令：

$$v=\frac{\pi x}{L} \tag{3}$$

❸第三步：調整積式之上下限：

當$v=\pi$時，$x=L$；當$v=-\pi$時，$x=-L$。另外，$dv=\dfrac{\pi}{L}dx$。基於此，式(1)可改寫為：

$$f\left(\frac{\pi x}{L}\right)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

其中係數a_0、a_n、b_n $(n=1,2,3,\cdots)$等亦需作適當之調整，亦即：

$a_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-L}^{L}f\left(\frac{\pi x}{L}\right)d\left(\frac{\pi x}{L}\right)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-L}^{L}f\left(\frac{\pi x}{L}\right)\frac{\pi}{L}dx=\dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$，

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-L}^{L}f\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}d\left(\frac{\pi x}{L}\right)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-L}^{L}f\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}\left(\frac{\pi}{L}dx\right)=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$，

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-L}^{L}f\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}d\left(\frac{\pi x}{L}\right)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-L}^{L}f\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\left(\frac{\pi}{L}dx\right)=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$。

最後，再定義$f\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)\equiv F(x)$，故週期為 $2L$ 之函數 $F(x)$的 Fourier 級數可表為：

$$F(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}F(x)dx \text{，} a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}F(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \text{，} b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \text{，} n=1,2,3,\cdots \text{。}$$

因函數 $F(x)$ 之符號亦可引用其他符號加以表示，故習慣上仍以 $f(x)$ 表示 Fourier 級數中之函數，如以下所示。

週期為 2*L* 的函數 *f*(*x*) 之 Fourier 級數
週期為 2*L* 的函數 *f*(*x*) 之 Fourier 級數係定義為： $$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1'}$$ 其中 $$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx \text{，} a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \text{，} b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \text{，} n=1,2,3,\cdots \text{。}$$

範例一

試求週期函數 $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<-1\\ a, & -1<x<1\\ 0, & 1<x<2\end{cases}$ 之 Fourier 級數，其中 $f(x+4)=f(x)$。

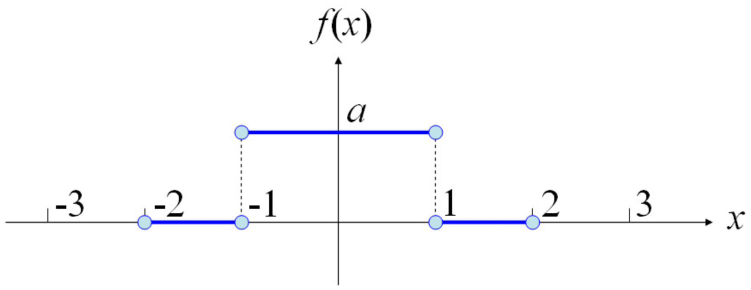


圖 1　問題中所示週期為 4 之函數 $f(x)$ 在區間 $[-2,2]$ 的示意圖

解答：

由之前的解析得知，週期為 4 的函數 $f(x)$之 Fourier 級數可表為：

$$F(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

其中係數

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{2(2)}\int_{-2}^{2}f(x)dx\\&=\frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx\right]\\&=\frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{-1}(0)dx+\int_{-1}^{1}(a)dx+\int_{1}^{2}(0)dx\right]\\&=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(a)dx\\&=\frac{1}{4}[ax]_{-1}^{1}\\&=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1} (0)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{-1}^{1} (a)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{1}^{2} (0)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (a)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{2a}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{a}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi(1)}{2} - \sin\frac{n\pi(-1)}{2}\right] \\
&= \frac{2a}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1} (0)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{-1}^{1} (a)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{1}^{2} (0)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (a)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\frac{2a}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-1}^{1} \\
&= -\frac{a}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi(1)}{2} - \cos\frac{n\pi(-1)}{2}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

故函數 $f(x)$之 Fourier 級數可表為：

$$
\boxed{f(x) = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2a}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi x}{2} = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{2a}{3\pi}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{2a}{5\pi}\cos\frac{5\pi x}{2} - + \cdots}
$$

範例二

如圖所示之週期函數 $f(x)$ 在一個週期內的定義為 $f(x)=|x|$ 、$-3<x<3$，試證其 Fourier 級數為 $f(x)=\dfrac{3}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos\dfrac{n\pi x}{3}$ 。

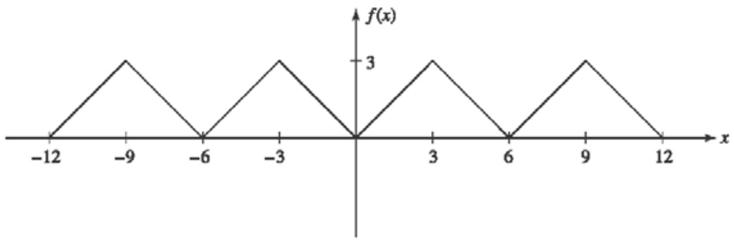


圖 2　週期為 6 之函數 $f(x)$ 的示意圖

證明：

已知週期為 $2L$ 之函數 $f(x)$ 的 Fourier 級數為：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

其中 $a_0=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)dx$，$a_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{L}dx$，$b_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{L}dx$，且 $L=3$。

因為 $f(x)$ 為偶函數，$\cos\dfrac{n\pi x}{L}$ 為偶函數，而 $\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ 為奇函數，故 $f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{L}$ 為偶函數，$f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ 為奇函數。所以

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{9}{3}=3$$

【註】：$\displaystyle\int_{-3}^{3}f(x)dx=f(x)$在$x=-3$至$x=3$之曲線下的面積

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\
&= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx \\
&= \frac{2}{3}\int_{0}^{3} f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx \\
&= \frac{2}{3}\int_{0}^{3} x\cos\frac{n\pi x}{3}dx \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{3x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}+\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\right)_0^3 \\
&= \frac{2}{3}\left[\left(\frac{9}{n\pi}\sin n\pi+\frac{9}{n^2\pi^2}\cos n\pi\right)-\left(0+\frac{9}{n^2\pi^2}\cos 0\right)\right] \\
&= \frac{2}{3}\frac{9}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right] \\
&= \frac{6}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]
\end{aligned}
$$

【註】：

$$
\begin{aligned}
\int x\cos\frac{n\pi x}{3}dx &= \int x d\left(\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right) \\
&= x\left(\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right) \\
&\quad -\int\left(\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)dx \\
&= \frac{3x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3} \\
&\quad +\frac{3^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3} \\
&= \frac{3x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3} \\
&\quad +\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}
\end{aligned}
$$

$$
b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx = 0
$$

【註】：因為 $f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}$ 為奇函數。

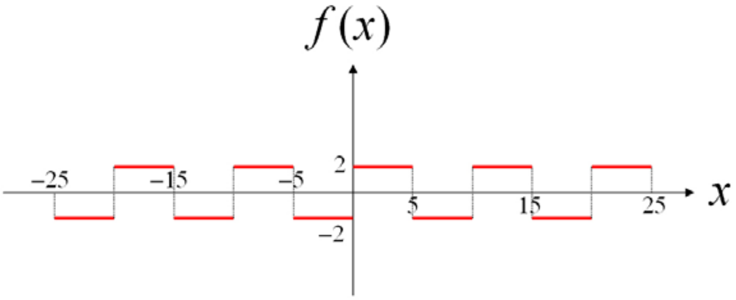
即問題之解為： $f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos\frac{n\pi x}{3}$ ，故得證。

範例三

(a)試繪出週期函數 $f(x)$ 之圖形：$f(x)=\begin{cases}-2, & -5<x<0 \\ 2, & 0<x<5\end{cases}$，且其週期為 10。(b)並求出其 Fourier 級數。

解答：

(a)



(b)由題意知問題之圖形如以上所示，且其為一奇函數（Odd Function）。另外，已知週期為 $2L$ 之函數 $f(x)$ 的 Fourier 級數為：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

其中 $a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$，$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$，$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$，且 $L=5$。

因為 $f(x)$ 為奇函數，$\cos\frac{n\pi x}{L}$ 為偶函數，而 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 為奇函數，故 $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ 為奇函數，$f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ 為偶函數。所以

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=0$$

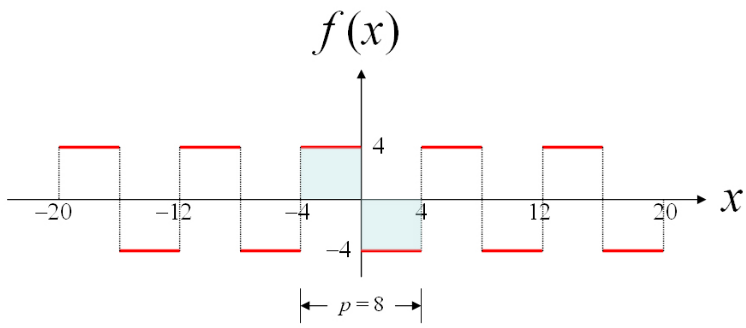
$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} 2\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{4}{L}\left(-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)_0^L \\
&= \frac{4}{L}\left(-\frac{L}{n\pi}\cos n\pi + \frac{L}{n\pi}\cos 0\right) \\
&= \frac{4}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]
\end{aligned}
$$

因 $L=5$，故問題之解為：$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\sin\frac{n\pi x}{5}}$。

範例四

已知週期函數 $f(x)$ 之定義為 $f(x)=\begin{cases}4, & -4<x<0\\ -4, & 0<x<4\end{cases}$，且其週期為 8。(a)試繪出其圖形，(b)試求出其 Fourier 級數。

解答：



由題意知問題之圖形如以上所示，且其為一奇函數（Odd Function）。另外，已知週期為 $2L$ 之函數 $f(x)$ 的 Fourier 級數為：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

其中 $a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$，$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$，$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$，且 $L=4$。因為 $f(x)$ 為奇函數，$\cos\frac{n\pi x}{L}$ 為偶函數，而 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 為奇函數，故 $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ 為奇函數，$f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ 為偶函數。所以

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=0$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{2}{4}\int_{0}^{4} (-4)\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx \\
&= \frac{2(-4)}{4}\left(-\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\right)_0^4 \\
&= \frac{8}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi x}{4}\right)_0^4 \\
&= \frac{8}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos 0\right) \\
&= \frac{8}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]
\end{aligned}
$$

因 $L=4$，故問題之解為：$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]\sin\frac{n\pi x}{4}}$。