提要 260：週期為 2π 的 Fourier 級數

在建立週期為 2π 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數時，需引用三個觀念：

❶ 週期為 p 之函數 $f(x)$ 的定義為：

$$f(x+p)=f(x+2p)=\cdots=f(x) \tag{1}$$

基於此，任意常數都可視為具有週期性之函數。例如常數 1 就是一個週期函數，且其週期可視為 2π。然而常數 1 之週期也可視為 10、100、1000 等等，因為這些都符合式(1)之定義。

❷ 週期為 2π 的函數 $f(x)$ 可以引用週期同為 2π 之正弦函數 $\sin nx$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ 及餘弦函數 $\cos nx$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ 加以表示，亦即：

$$f(x)\sim \cos 0x,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ \cos 4x,\ \cdots,\ \sin 0x,\ \sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \sin 4x,\ \cdots \tag{2}$$

其中 $\cos 0x=1$、$\sin 0x=0$。而常數 1 的週期可視為 2π；另外，$\cos x$、$\cos 2x$、$\cos 3x$、$\cos 4x$、$\cdots$、$\sin x$、$\sin 2x$、$\sin 3x$、$\sin 4x$、$\cdots$之週期也都可以視為 2π，因這些函數均符合式(1)之定義。

❸ 式(2)若要寫成等號關係，則每一個項次在相加之前都需乘上一個修正係數或加權係數，亦即：

$$\begin{aligned} f(x)&=a_0\cos 0x+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+a_4\cos 4x+\cdots \\ &\quad +b_0\sin 0x+b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+b_4\sin 4x+\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

其中 b_0 可為任意值，因為 $\sin 0x=0$。但是其他的係數則不能隨意給值，而必須找出一個道理才行。以下先整理出週期為 2π 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數，然後再證明其加權係數 a_n、b_n 與週期函數 $f(x)$ 的關係。

週期為 2π 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數
週期為 2π 的函數 $f(x)$ 之 Fourier 級數係定義為： $$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (4)$$ 其中 $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$，$n=1,2,3,\cdots$。

證明：

❶ $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$之推導

已知 $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，先對此式中之變數 x 作 $-\pi$ 到 π 的線積分，則上式可表為：

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}a_0dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx \\
&= \left[a_0x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\sin nx}{n}-b_n\frac{\cos nx}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= a_0[\pi-(-\pi)]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{\sin n\pi-\sin(-n\pi)}{n}-b_n\frac{\cos n\pi-\cos(-n\pi)}{n}\right] \\
&= 2\pi a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(0)-b_n(0)] \\
&= 2\pi a_0
\end{aligned}$$

故

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}$$

❷ $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$ 之推導

已知 $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，先對此式乘以 $\cos mx$，再對其中之變數 x 作 $-\pi$ 到 π 之線積分，則上式可表為：

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]\cos mxdx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos mxdx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\cos mxdx \\ &= a_0 \left.\frac{\sin mx}{m}\right|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos mxdx\right)\end{aligned}$$

其中 $\left.\frac{\sin mx}{m}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$。由三角函數之正交性知，上式中之積分式可分別表為：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mxdx = \begin{cases} 0, & for\ m \neq n \\ \pi, & for\ m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos mxdx = 0, \quad \text{for any } m \text{ and } n$$

基於此可知：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = a_m\pi$$

故

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx$$

再將符號 m 改寫為 n，即為所欲研討出與 Fourier 級數之係數有關之第二個公式：

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx}$$

❸ $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$ 之推導

已知 $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，先對此式乘以 $\sin mx$，再對其中之變數 x 作 $-\pi$ 到 π 之線積分，則上式可表為：

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]\sin mxdx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin mxdx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\sin mxdx \\
&= -a_0 \frac{\cos mx}{m}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \sin mxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \sin mxdx\right)
\end{aligned}$$

其中 $\dfrac{\cos mx}{m}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$。由三角函數之正交性知，上式中之積分式可分別表為：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \sin mxdx = \begin{cases} 0, & for\ m \neq n \\ \pi, & for\ m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \sin mxdx = 0, \quad \text{for any } m \text{ and } n$$

基於此可知：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx = b_m \pi$$

故

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx$$

再將符號 m 改寫為 n，即為所欲研討出與 Fourier 級數之係數有關之第三個公式：

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx}$$

範例一

試求週期函數 $f(x)=\begin{cases} a, & 0<x<\pi \\ -a, & -\pi<x<0 \end{cases}$ 之 Fourier 級數，其中 $f(x+2\pi)=f(x)$。

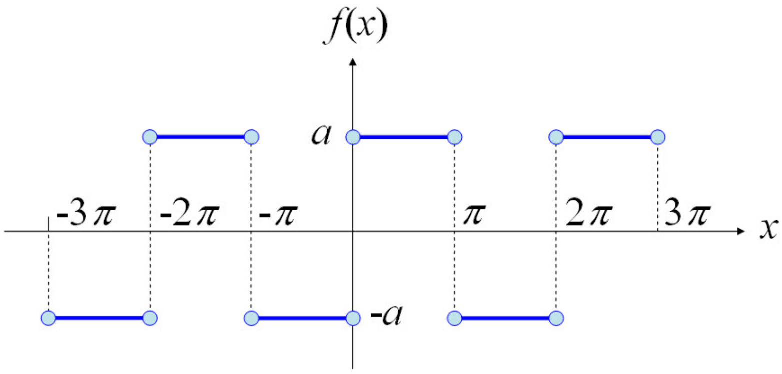


圖 1　週期函數 $f(x)$之圖形示意圖

解答：

由之前的解析得知，週期為 2π的函數 $f(x)$之 Fourier 級數可表為：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

其中係數

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-a)dx+\int_{0}^{\pi}(a)dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-ax\Big|_{-\pi}^{0}+ax\Big|_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{-a[0-(-\pi)]+a[\pi-0]\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-a)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} (a)\cos nx dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-a\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} + a\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-a\frac{\sin 0-\sin(-n\pi)}{n} + a\frac{\sin n\pi-\sin 0}{n}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-a)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} (a)\sin nx dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[a\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} - a\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[a\frac{\cos 0-\cos(-n\pi)}{n} - a\frac{\cos n\pi-\cos 0}{n}\right] \\
&= \frac{2a}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]
\end{aligned}
$$

故函數 $f(x)$之 Fourier 級數可表為：

$$
\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\sin nx = \frac{4a}{\pi}\sin x + \frac{4a}{3\pi}\sin 3x + \frac{4a}{5\pi}\sin 5x + \cdots}
$$

範例二

如圖所示之週期函數 $f(x)$ 在一個週期內的定義為 $f(x)=x^2$ ，$-\pi \le x \le \pi$ ，試求其 Fourier 級數。

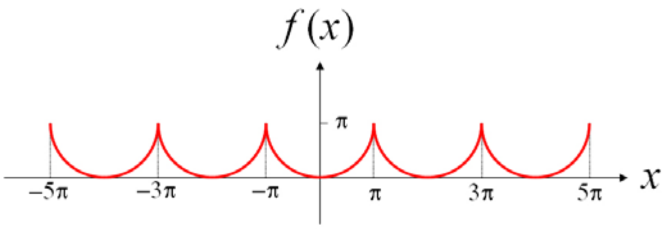


圖 2　週期函數 $f(x)$ 之圖形示意圖

解答：

由題意知問題之圖形如右所示，且其為一偶函數。已知週期為 2π 之函數 $f(x)$ 的 Fourier 級數為：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

其中 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$ ，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$ ，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$ 。因為 $f(x)$ 為偶函數，$\cos nx$ 為偶函數，而 $\sin nx$ 為奇函數，故 $f(x)\cos nx$ 為偶函數， $f(x)\sin nx$ 為奇函數。所以

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[x^2\left(\frac{\sin nx}{n}\right)-\int\frac{\sin nx}{n}d\left(x^2\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2\sin nx}{n}-\frac{2}{n}\int x\sin nxdx\right)_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}-\frac{2}{n}\int xd\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2\sin nx}{n}-\frac{2}{n}\left[x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)-\int\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx\right]\right\}_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}-\frac{2}{n}\left(-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2\sin nx}{n}+\frac{2x\cos nx}{n^2}-\frac{2\sin nx}{n^3}\right)_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi^2\sin n\pi}{n}+\frac{2\pi\cos n\pi}{n^2}-\frac{2\sin n\pi}{n^3}\right)-\left(0+0-\frac{2\sin 0}{n^3}\right)\right]$$

$$=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

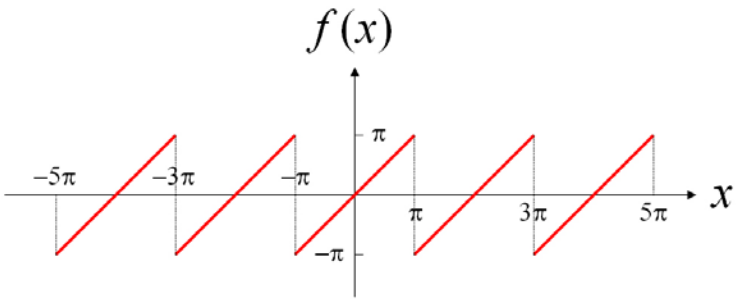
$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n\pi dx=0$ 【註】：因為 $f(x)\sin nx$ 為奇函數。

故問題之解為：$\boxed{f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx}$。

範例三

已知 $f(x)=x$、$-\pi \le x \le \pi$，且其週期為 2π，試求出其 Fourier 級數。

解答：



由題意知問題之圖形如以上所示，且其為一奇函數（Odd Function）。另外，已知週期為 2π 之函數 $f(x)$ 的 Fourier 級數為：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

其中 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$。因為 $f(x)$ 為奇函數，$\cos nx$ 為偶函數，而 $\sin nx$ 為奇函數，故 $f(x)\cos nx$ 為奇函數，$f(x)\sin nx$ 為偶函數。所以

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$$

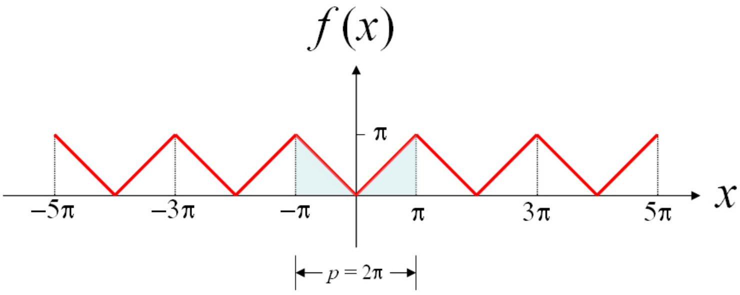
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right)_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n}+\frac{\sin 0}{n^2}\right)-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{0\cos 0}{n}+\frac{\sin 0}{n^2}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi(-1)^n}{n}\right] \\
&= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

其中 $\int x\sin nx dx = \int xd\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) = x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - \int\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx = -\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}$，故問題之解為：$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx}$。

範例四
已知 $f(x)=\lvert x\rvert$、$-\pi\le x\le\pi$，且其週期為 2π。(a)試繪出其圖形，(b)試求出其 Fourier 級數。

解答：



由題意知問題之圖形如以上所示，且其為一奇函數（Odd Function）。另外，已知週期為 2π 之函數 $f(x)$ 的 Fourier 級數為：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

其中 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$。因為 $f(x)$ 為偶函數，$\cos nx$ 為偶函數，而 $\sin nx$ 為奇函數，故 $f(x)\cos nx$ 為偶函數，$f(x)\sin nx$ 為奇函數。所以

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\times\left\{f(x)\text{位於}[-\pi,\pi]\text{之面積}\right\}=\frac{1}{\pi}\times\left\{\pi\times\pi\right\}=\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - \int \frac{\sin nx}{n} dx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi\sin n\pi}{n} + \frac{\cos n\pi}{n^2} - 0 - \frac{\cos 0}{n^2}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[0 + \frac{(-1)^n}{n^2} - 0 - \frac{1}{n^2}\right]$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$b_n = 0$$

故問題之解為：$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right]\cos nx}$。