提要 259：三角函數之正交性(Orthogonality)

在探討 Fourier 級數問題時，常需面對許多牽涉三角函數中之「正弦函數」和「餘弦函數」的定積分，解決此類常見問題時，前人發現，可利用以下三個簡單關係式推求出問題之積分值，這三個簡單積分式的關係稱為三角函數之正交性(Orthogonality)，說明如下。

三角函數之正交性(Orthogonality)
1. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & for\ m \neq n \\ \pi, & for\ m = n \end{cases}$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & for\ m \neq n \\ \pi, & for\ m = n \end{cases}$
3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0, \quad \text{for any } m \text{ and } n$

證明：

雖然很少有人需面對三角函數之正交性(Orthogonality)的證明，但是對其由來之清楚瞭解，應有助於將以上所示積分公式背下來，甚至於在忘記積分公式時，還能將所需公式給推導出來。

國中時，讀者應有學過三角函數之和積關係式如下：

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \tag{1a}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \tag{1b}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \tag{1c}$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \tag{1d}$$

茲考慮式(1a)與式(1b)相加除以 2、式(1b)減式(1a)再除以 2、式(1c)與式(1d)相加除以 2 可分別求得：

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \tag{2a}$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right] \tag{2b}$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right] \tag{2c}$$

式(2a)-(2c)中之符號a改寫為mx、b改寫為nx，再分別對變數x進行$-\pi$到π之線積分，可得：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\cos[(m-n)x]+\cos[(m+n)x]\right\}dx \tag{3a}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\cos[(m-n)x]-\cos[(m+n)x]\right\}dx \tag{3b}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sin[(m-n)x]+\sin[(m+n)x]\right\}dx \tag{3c}$$

其中

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(m-n)x]dx=\left.\frac{\sin[(m-n)x]}{m-n}\right|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\sin[(m-n)\pi]}{m-n}-\frac{\sin[-(m-n)\pi]}{m-n}=\frac{2\sin[(m-n)\pi]}{m-n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(m+n)x]dx=\left.\frac{\sin[(m+n)x]}{m+n}\right|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\sin[(m+n)\pi]}{m+n}-\frac{\sin[-(m+n)\pi]}{m+n}=\frac{2\sin[(m+n)\pi]}{m+n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin[(m-n)x]dx=-\left.\frac{\cos[(m-n)x]}{m-n}\right|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{\cos[(m-n)\pi]}{m-n}+\frac{\cos[-(m-n)\pi]}{m-n}=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin[(m+n)x]dx=-\left.\frac{\cos[(m+n)x]}{m+n}\right|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{\cos[(m+n)\pi]}{m+n}+\frac{\cos[-(m+n)\pi]}{m+n}=0$$

故式(3a)-(3c)可改寫為：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\frac{\sin[(m-n)\pi]}{m-n}+\frac{\sin[(m+n)\pi]}{m+n} \tag{4a}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\frac{\sin[(m-n)\pi]}{m-n}-\frac{\sin[(m+n)\pi]}{m+n} \tag{4b}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \tag{4c}$$

式(4a)與式(4b)中之正弦函數的值與m、n有關，說明下：

❶當$m \neq n$且m、n均為自然數時，$\frac{\sin[(m+n)\pi]}{m+n} = 0$、$\frac{\sin[(m-n)\pi]}{m-n} = 0$。

❷當$m = n$且m、n均為自然數時，$\frac{\sin[(m+n)\pi]}{m+n} = 0$、但$\frac{\sin[(m-n)\pi]}{m-n} \neq 0$，因為由羅必達定理(L'Hospital's Rule)知：

$$\lim_{m \to n} \frac{\sin[(m-n)\pi]}{m-n} = \lim_{m \to n} \frac{d \sin[(m-n)\pi]/dm}{d(m-n)/dm} = \lim_{m \to n} \frac{\pi \cos[(m-n)\pi]}{1} = \pi \cos 0 = \pi \tag{5}$$

故式(4a)與式(4b)可加以改寫，再將式(4c)整理在一起，即可證出三角函數之正交性：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases} \tag{6a}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases} \tag{6b}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \text{(其中 } m \text{、} n \text{ 為任意值)} \tag{4c}$$