提要 257：史托克定理(Stokes' Theorem)之例證(III)

作者擬在本單元中繼續加強讀者在史托克定理(Stokes' Theorem)方面之計算能力。

史托克定理(Stokes' Theorem)

如圖 1 所示，令 S 表曲面，而曲面 S 的邊界為封閉曲線 C，若向量函數 $\mathbf{F}$ 及其一階偏導數(First Partial Derivative)在 S 中均為連續函數，則：

$$\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \tag{1}$$

其中 $d\mathbf{A} = \mathbf{n}dA$，$\mathbf{n}$ 表曲面 S 之單位法線向量(Unit Normal Vector)；路徑 C 之線積分方向與 $\mathbf{n}$ 有關，需以右手定則(Right-Handed Rule)規範路徑 C 之線積分方向與 $\mathbf{n}$ 之方向【握拳方向為 C 之線積分方向，大拇指方向為 $\mathbf{n}$ 之方向】。

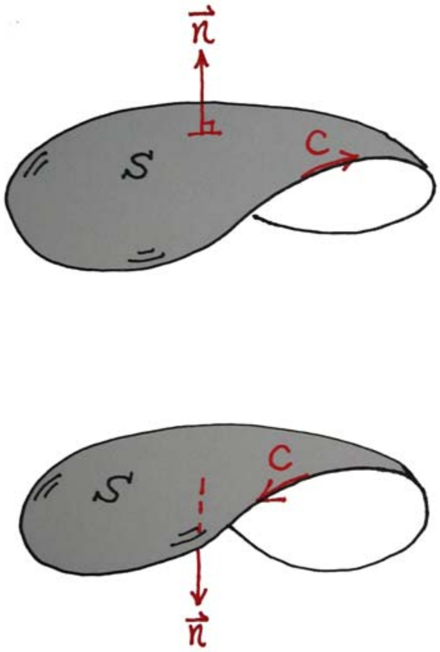

圖 1　曲面 S 的邊界為封閉曲線 C

【附註】格林定理(Green's Theorem) $\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}dxdy = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ 為史托克定理之特例。

範例一

已知曲面 S 為：$x^2+y^2\le 1$、$z=0$，如圖 2 所示，且$\mathbf{F}=y^3\mathbf{i}-x^3\mathbf{j}$，試驗算史托克定理：$\iint\limits_R(\nabla\times\mathbf{F})\bullet d\mathbf{A}=\oint\limits_C\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ 。

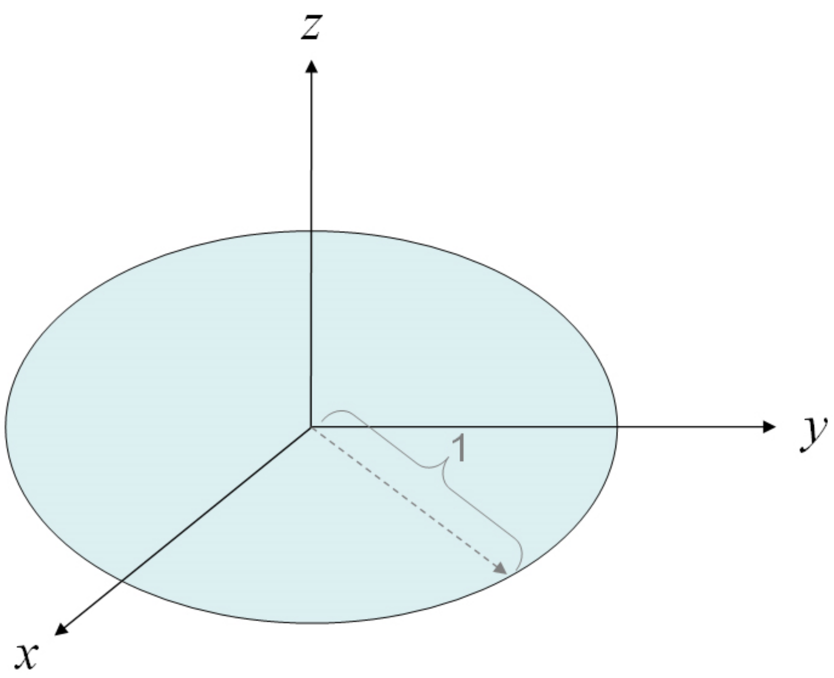

圖 2　曲面 S 及其所對應的封閉曲線 C 之示意圖

解答：

由史托克定理知：

$$\iint\limits_R(\nabla\times\mathbf{F})\bullet d\mathbf{A}=\oint\limits_C\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$

以下分別計算其面積分與線積分之積分值。

❶ 面積分之計算

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A} = \iint_S \left[\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(y^3\mathbf{i}-x^3\mathbf{j}\right)\right]\cdot\left(dxdy\mathbf{k}\right)$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3 & -x^3 & 0 \end{vmatrix}\cdot\left(dxdy\mathbf{k}\right)$$

$$=\iint_S \left\{\mathbf{i}\left[\frac{\partial 0}{\partial y}-\frac{\partial\left(-x^3\right)}{\partial z}\right]+\mathbf{j}\left[\frac{\partial\left(y^3\right)}{\partial z}-\frac{\partial 0}{\partial x}\right]\right.$$

$$\left.+\mathbf{k}\left[\frac{\partial\left(-x^3\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(y^3\right)}{\partial y}\right]\right\}\cdot\left(dxdy\mathbf{k}\right)$$

$$=\iint_S \left[\left(-3x^2-3y^2\right)\mathbf{k}\right]\cdot\left(dxdy\mathbf{k}\right)$$

$$=\iint_S \left(-3x^2-3y^2\right)dxdy$$

若令 $x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$，其中 $0\le r\le 1$、$0\le\theta<2\pi$，且微小面積 $dxdy=rdrd\theta$，則：

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} = \iint_S \left(-3x^2 - 3y^2\right) dxdy$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \left(-3r^2 \cos^2\theta - 3r^2 \sin^2\theta\right) r dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \left(-3r^2\right) r dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \left(-3r^3\right) dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(-\frac{3}{4} r^4\right)_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(-\frac{3}{4}\right) d\theta$$

$$= \left(-\frac{3}{4}\theta\right)_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= -\frac{3}{4}(2\pi)$$

$$= -\frac{3\pi}{2}$$

❷ 線積分之計算

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_{C:\,x=\cos t,\, y=\sin t,\, z=0} \left(y^3\mathbf{i} - x^3\mathbf{j}\right)\bullet\left(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}\right)$$

$$= \int_{C:\,x=\cos t,\, y=\sin t,\, z=0} \left(y^3 dx - x^3 dy\right)$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} \left(\sin^3 t\, d\cos t - \cos^3 t\, d\sin t\right)$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} \left(-\sin^4 t\, dt - \cos^4 t\, dt\right)$$

$$= -\int_{t=0}^{t=2\pi} \left(\sin^4 t + \cos^4 t\right) dt$$

$$= -\int_{t=0}^{t=2\pi} \left[\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)^2 - 2\sin^2 t\cos^2 t\right] dt$$

$$= -\int_{t=0}^{t=2\pi} \left[(1)^2 - 2\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\right] dt$$

$$= -\int_{t=0}^{t=2\pi} \left(1 - \frac{1-\cos^2 2t}{2}\right) dt$$

$$= -\int_{t=0}^{t=2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos^2 2t}{2}\right) dt$$

$$= -\int_{t=0}^{t=2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos 4t}{2}\right)\right] dt$$

$$= -\int_{t=0}^{t=2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{\cos 4t}{4}\right) dt$$

$$= -\left(\frac{3t}{4} + \frac{\sin 4t}{16}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi}$$

$$= -\frac{6\pi}{4}$$

$$= -\frac{3\pi}{2}$$

由此可知，兩種不同計算方式確實能獲得相同結果，故得證。