提要 256：史托克定理(Stokes' Theorem)之例證(II)

作者擬在本單元中繼續加強讀者在史托克定理(Stokes' Theorem)方面之計算能力。

史托克定理(Stokes' Theorem)

如圖 1 所示，令 S 表曲面，而曲面 S 的邊界為封閉曲線 C，若向量函數 $\mathbf{F}$ 及其一階偏導數(First Partial Derivative)在 S 中均為連續函數，則：

$$\iint_R (\nabla\times\mathbf{F})\bullet d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} \tag{1}$$

其中 $d\mathbf{A}=\mathbf{n}dA$，$\mathbf{n}$ 表曲面 S 之單位法線向量(Unit Normal Vector)；路徑 C 之線積分方向與 $\mathbf{n}$ 有關，需以右手定則(Right-Handed Rule)規範路徑 C 之線積分方向與 $\mathbf{n}$ 之方向【握拳方向為 C 之線積分方向，大拇指方向為 $\mathbf{n}$ 之方向】。

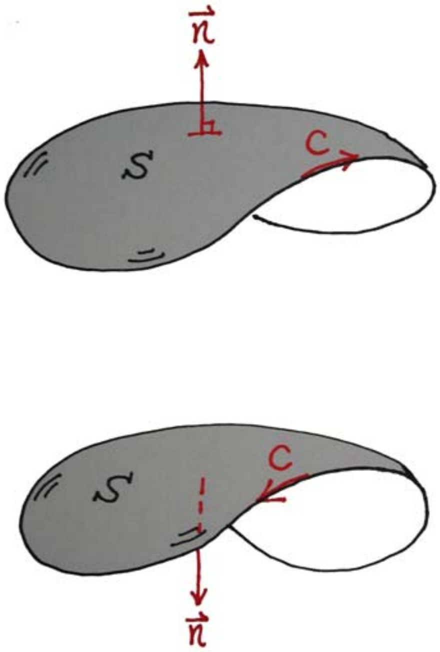

圖 1　曲面 S 的邊界為封閉曲線 C

【附註】格林定理(Green's Theorem) $\iint_R (\nabla\times\mathbf{F})\bullet\mathbf{k}dxdy = \oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ 為史托克定理之特例。

範例一

已知曲面 S 為：$z = y$、$0 \le x \le 1$、$0 \le y \le 1$，如圖 2 所示，且 $\mathbf{F} = 2z^2\mathbf{i} + 8x\mathbf{j}$，試驗算史托克定理：$\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$。

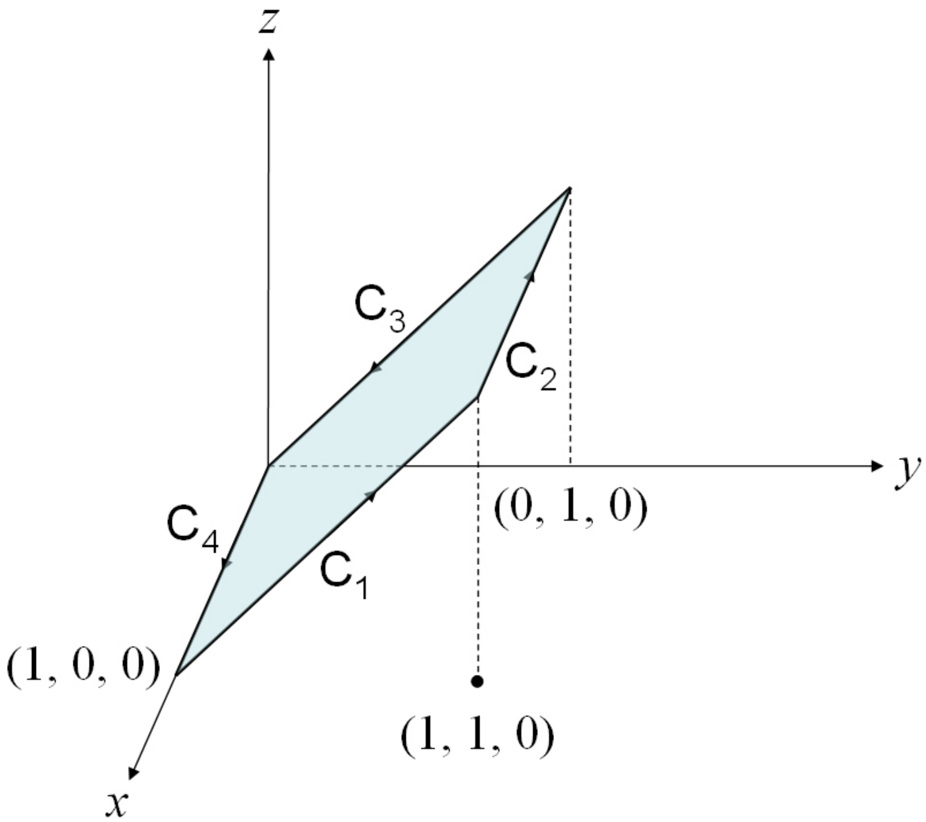

圖 2　曲面 S 及其所對應的封閉曲線 C 之示意圖

解答：

由史托克定理知：

$$\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

以下分別計算其面積分與線積分之積分值。

❶ 面積分之計算

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A} = \iint_S \left[\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(2z^2\mathbf{i}+8x\mathbf{j}\right)\right]\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dudv$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2z^2 & 8x & 0\end{vmatrix}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dudv$$

$$=\iint_S \left\{\mathbf{i}\left[\frac{\partial 0}{\partial y}-\frac{\partial(8x)}{\partial z}\right]+\mathbf{j}\left[\frac{\partial\left(2z^2\right)}{\partial z}-\frac{\partial 0}{\partial x}\right]\right.$$

$$\left.+\mathbf{k}\left[\frac{\partial(8x)}{\partial x}-\frac{\partial\left(2z^2\right)}{\partial y}\right]\right\}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dudv$$

$$=\iint_S (4z\mathbf{j}+8\mathbf{k})\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dudv$$

若令 $x=u$ 、 $y=v$ ，其中 $0\le u\le 1$ 、 $0\le v\le 1$ ，則 $z=v$ 。故

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+v\mathbf{k}$$ ，且

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=\frac{\partial\left(u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+v\mathbf{k}\right)}{\partial u}\times\frac{\partial\left(u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+v\mathbf{k}\right)}{\partial v}$$

$$=(\mathbf{i})\times(\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

因此

$$
\begin{aligned}
\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} &= \iint_S (4z\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{j} + \mathbf{k})\, du\, dv \\
&= \iint_S (-4z + 8)\, du\, dv \Big|_{x=u,\ y=v,\ z=v} \\
&= \int_{v=0}^{v=1} \int_{u=0}^{u=1} (-4v + 8)\, du\, dv \\
&= \int_{v=0}^{v=1} u\,(-4v + 8)\Big|_{u=0}^{u=1}\, dv \\
&= \int_{v=0}^{v=1} (-4v + 8)\, dv \\
&= \left(-2v^2 + 8v\right)\Big|_{v=0}^{v=1} \\
&= (-2 + 8) - (-0 + 0) \\
&= 6
\end{aligned}
$$

❷ 線積分之計算

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_{C_1}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} + \int_{C_2}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} + \int_{C_3}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} + \int_{C_4}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$

$$= \int_{\substack{C_1:\,from\ y=0\ to\ y=1\\ \&\ x=1,\ y=z}} \left(2z^2\mathbf{i}+8x\mathbf{j}\right)\bullet\left(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k}\right)$$

$$+ \int_{\substack{C_2:\,from\ x=1\ to\ x=0\\ \&\ y=1,\ z=1}} \left(2z^2\mathbf{i}+8x\mathbf{j}\right)\bullet\left(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k}\right)$$

$$+ \int_{\substack{C_3:\,from\ y=1\ to\ y=0\\ \&\ x=0,\ y=z}} \left(2z^2\mathbf{i}+8x\mathbf{j}\right)\bullet\left(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k}\right)$$

$$+ \int_{\substack{C_4:\,from\ x=0\ to\ x=1\\ \&\ y=0,\ z=0}} \left(2z^2\mathbf{i}+8x\mathbf{j}\right)\bullet\left(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k}\right)$$

$$= \int_{\substack{C_1:\,from\ y=0\ to\ y=1\\ \&\ x=1,\ y=z}} \left(2z^2dx+8xdy\right) + \int_{\substack{C_2:\,from\ x=1\ to\ x=0\\ \&\ y=1,\ z=1}} \left(2z^2dx+8xdy\right)$$

$$+ \int_{\substack{C_3:\,from\ y=1\ to\ y=0\\ \&\ x=0,\ y=z}} \left(2z^2dx+8xdy\right) + \int_{\substack{C_4:\,from\ x=0\ to\ x=1\\ \&\ y=0,\ z=0}} \left(2z^2dx+8xdy\right)$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\left(2y^2\,d1+8dy\right) + \int_{x=1}^{x=0}\left(2\,dx+8xd1\right) + \int_{y=1}^{y=0}\left(2y^2\,d0+0dy\right) + \int_{x=0}^{x=1}\left(0\,dx+8xd0\right)$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\left(8dy\right) + \int_{x=1}^{x=0}\left(2\,dx\right) + \int_{y=1}^{y=0}\left(0dy\right) + \int_{x=0}^{x=1}\left(0\,dx\right)$$

$$= \left(8y\right)_{y=0}^{y=1} + \left(2x\right)_{x=1}^{x=0} + \left(0\right) + \left(0\right)$$

$$= \left(8-0\right) + \left(0-2\right)$$

$$= 6$$

由此可知，兩種不同計算方式確實能獲得相同結果，故得證。

【附註】 $d1=0$ ， $d0=0$ 。