提要 255：史托克定理(Stokes' Theorem)之例證(I)

許多讀者對史托克定理(Stokes' Theorem)的計算相當陌生，故自本單元起的三個單元之內容，作者擬多加強讀者在這方面的能力。

史托克定理(Stokes' Theorem)

如圖 1 所示，令 S 表曲面，而曲面 S 的邊界為封閉曲線 C，若向量函數 $\mathbf{F}$ 及其一階偏導數(First Partial Derivative)在 S 中均為連續函數，則：

$$\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \tag{1}$$

其中 $d\mathbf{A} = \mathbf{n}dA$，$\mathbf{n}$ 表曲面 S 之單位法線向量(Unit Normal Vector)；路徑 C 之線積分方向與 $\mathbf{n}$ 有關，需以右手定則(Right-Handed Rule)規範路徑 C 之線積分方向與 $\mathbf{n}$ 之方向【握拳方向為 C 之線積分方向，大拇指方向為 $\mathbf{n}$ 之方向】。

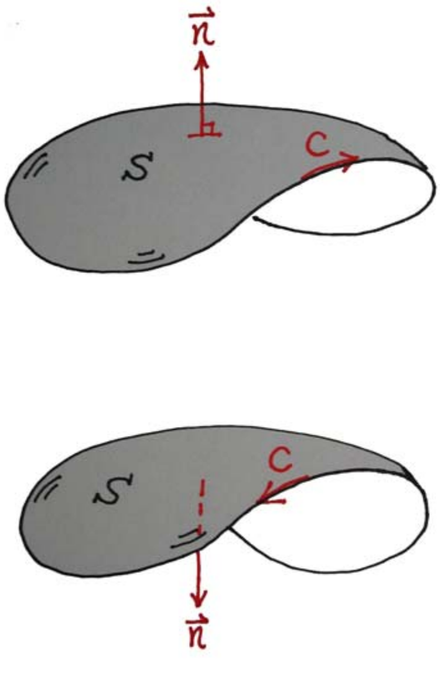

圖 1　曲面 S 的邊界為封閉曲線 C

【附註】格林定理(Green's Theorem) $\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}dxdy = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ 為史托克定理之特例。

範例一

已知曲面 S 如圖 2 所示，且 $\mathbf{F} = 5\cos y\mathbf{i} + \cosh z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$，試驗算史托克定理：$\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$。

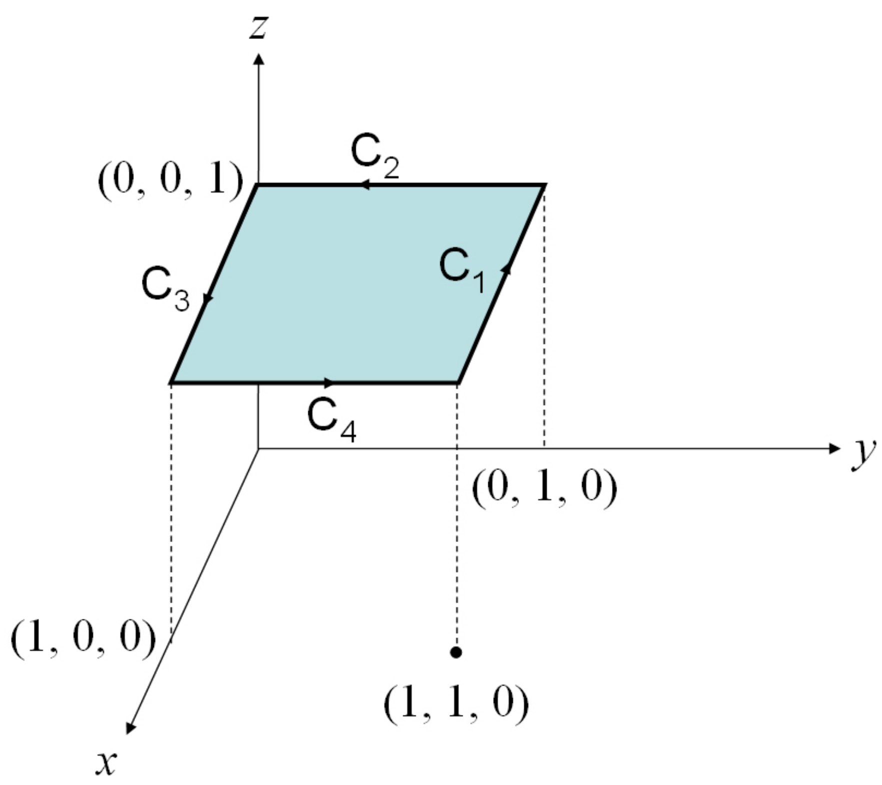

圖 2　曲面 S 及其所對應的封閉曲線 C 之示意圖

解答：

由史托克定理知：

$$\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

以下分別計算其面積分與線積分之積分值。

❶ 面積分之計算

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A} = \iint_S \left[\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(5\cos y\mathbf{i}+\cosh z\mathbf{j}+x\mathbf{k}\right)\right]\cdot\left(dxdy\mathbf{k}\right)$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 5\cos y & \cosh z & x \end{vmatrix}\cdot\left(dxdy\mathbf{k}\right)$$

$$= \iint_S \left[\mathbf{i}\left(\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{\partial\cosh z}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial 5\cos y}{\partial z}-\frac{\partial x}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left.+\mathbf{k}\left(\frac{\partial\cosh z}{\partial x}-\frac{\partial 5\cos y}{\partial y}\right)\right]\cdot\left(dxdy\mathbf{k}\right)$$

$$= \iint_S \left(-\sinh z\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\sin y\mathbf{k}\right)\cdot\left(dxdy\mathbf{k}\right)$$

$$= \iint_S 5\sin y\,dxdy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=1} 5\sin y\,dxdy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \left(5x\sin y\right)_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \left(5\sin y\right)dy$$

$$= \left(-5\cos y\right)_{y=0}^{y=1}$$

$$= \left(-5\cos 1\right)-\left(-5\cos 0\right)$$

$$= -5\cos 1+5$$

$$= 5\left(1-\cos 1\right)$$

❷ 線積分之計算

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} + \int_{C_4} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$

$$= \int_{\substack{C_1:\ from\ x=1\ to\ x=0 \\ \&\ y=1,\ z=1}} \left(5\cos y\mathbf{i} + \cosh z\,\mathbf{j} + x\mathbf{k}\right)\bullet dx\mathbf{i}$$

$$+ \int_{\substack{C_2:\ from\ y=1\ to\ y=0 \\ \&\ x=0,\ z=1}} \left(5\cos y\mathbf{i} + \cosh z\,\mathbf{j} + x\mathbf{k}\right)\bullet dy\mathbf{j}$$

$$+ \int_{\substack{C_3:\ from\ x=0\ to\ x=1 \\ \&\ y=0,\ z=1}} \left(5\cos y\mathbf{i} + \cosh z\,\mathbf{j} + x\mathbf{k}\right)\bullet dx\mathbf{i}$$

$$+ \int_{\substack{C_4:\ from\ y=0\ to\ y=1 \\ \&\ x=1,\ z=1}} \left(5\cos y\mathbf{i} + \cosh z\,\mathbf{j} + x\mathbf{k}\right)\bullet dy\mathbf{j}$$

$$= \int_{\substack{C_1:\ from\ x=1\ to\ x=0 \\ \&\ y=1,\ z=1}} \left(5\cos y\ dx\right) + \int_{\substack{C_2:\ from\ y=1\ to\ y=0 \\ \&\ x=0,\ z=1}} \left(\cosh z\ dy\right) + \int_{\substack{C_3:\ from\ x=0\ to\ x=1 \\ \&\ y=0,\ z=1}} \left(5\cos y\ dx\right) + \int_{\substack{C_4:\ from\ y=0\ to\ y=1 \\ \&\ x=1,\ z=1}} \left(\cosh z dy\right)$$

$$= \int_{x=1}^{x=0} 5\cos 1\,dx + \int_{y=1}^{y=0} \cosh 1\,dy + \int_{x=0}^{x=1} 5\cos 0\,dx + \int_{y=0}^{y=1} \cosh 1 dy$$

$$= \left(5x\cos 1\right)_{x=1}^{x=0} + \left(y\cosh 1\right)_{y=1}^{y=0} + \left(5x\cos 0\right)_{x=0}^{x=1} + \left(y\cosh 1\right)_{y=0}^{y=1}$$

$$= \left(-5\cos 1\right) + \left(-\cosh 1\right) + \left(5\right) + \left(\cosh 1\right)$$

$$= 5\left(1-\cos 1\right)$$

由此可知，兩種不同計算方式確實能獲得相同結果，故得證。