提要 254：第二個重要的向量定理--史托克定理(Stokes' Theorem)

散度定理(Divergence Theorem)與史托克定理(Stokes' Theorem)為向量中之兩大重要定理，之前所介紹的格林定理(Green's Theorem)係史托克定理之特殊情況，散度定理亦常被稱之為高斯定理(Gauss Theorem)，這兩大定理請讀者務必弄懂它。

史托克定理(Stokes' Theorem)

如圖 1 所示，令 S 表曲面，而曲面 S 的邊界為封閉曲線 C，若向量函數 $\mathbf{F}$ 及其一階偏導數(First Partial Derivative)在 S 中均為連續函數，則：

$$\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \tag{1}$$

其中 $d\mathbf{A} = \mathbf{n}dA$，$\mathbf{n}$ 表曲面 S 之單位法線向量(Unit Normal Vector)；路徑 C 之線積分方向與 $\mathbf{n}$ 有關，需以右手定則(Right-Handed Rule)規範路徑 C 之線積分方向與 $\mathbf{n}$ 之方向【握拳方向為 C 之線積分方向，大拇指方向為 $\mathbf{n}$ 之方向】。

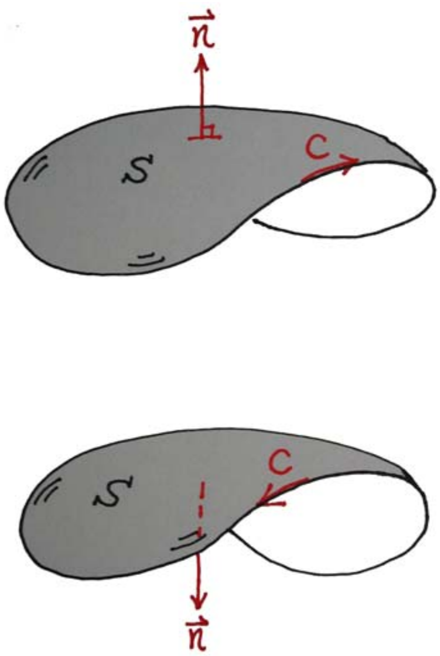

圖 1　曲面 S 的邊界為封閉曲線 C

【附註】格林定理 $\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}dxdy = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ 為史托克定理之特例。

範例一

已知如圖 2 所示之曲面 S 為：

$$z = f(x, y) = 1 - \left(x^2 + y^2\right)\text{、}\ z \ge 0$$

且 $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$，試驗算史托克定理：$\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$。

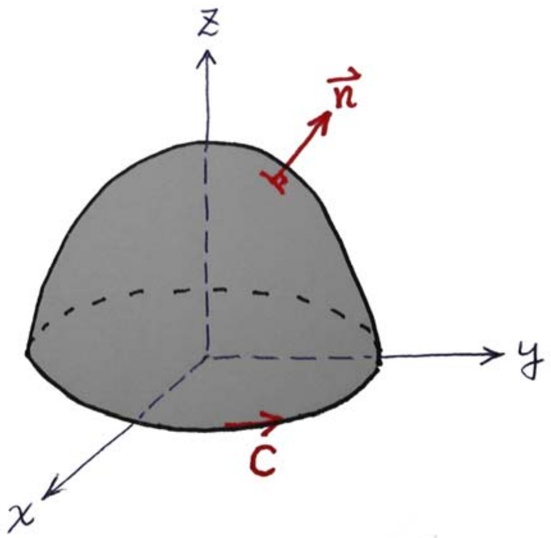

圖 2　曲面 S 及其所對應的封閉曲線 C 之示意圖

解答：

由史托克定理知：

$$\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

以下分別計算其面積分與線積分之積分值。

❶ 面積分之計算

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A}=\iint_S\left[\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k})\right]\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dudv$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ y&z&x\end{vmatrix}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dudv$$

$$=\iint_S\left[\mathbf{i}\left(\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial x}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial y}\right)\right]\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dudv$$

$$=\iint_S(-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dudv$$

若令 $x=u\cos v$ 、 $y=u\sin v$ ，其中 $0\le u\le 1$ 、 $0\le v<2\pi$ ，則 $z=1-u^2$ 。故

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+\left(1-u^2\right)\mathbf{k}$$ ，且

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=\frac{\partial\left[u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+\left(1-u^2\right)\mathbf{k}\right]}{\partial u}\times\frac{\partial\left[u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+\left(1-u^2\right)\mathbf{k}\right]}{\partial v}$$

$$=(\cos v\mathbf{i}+\sin v\mathbf{j}-2u\mathbf{k})\times(-u\sin v\mathbf{i}+u\cos v\mathbf{j})$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \cos v&\sin v&-2u\\ -u\sin v&u\cos v&0\end{vmatrix}$$

$$=2u^2\cos v\mathbf{i}+2u^2\sin v\mathbf{j}+u\left(\cos^2 v+\sin^2 v\right)\mathbf{k}$$

$$=2u^2\cos v\mathbf{i}+2u^2\sin v\mathbf{j}+u\mathbf{k}$$

因此

$$\begin{aligned}
\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} &= \iint_S (-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \, du dv \\
&= \iint_S (-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot \left(2u^2 \cos v \mathbf{i} + 2u^2 \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k} \right) du dv \\
&= \int_{v=0}^{v=2\pi} \int_{u=0}^{u=1} \left(-2u^2 \cos v - 2u^2 \sin v - u \right) du dv \\
&= \int_{v=0}^{v=2\pi} \left(-\frac{2}{3} u^3 \cos v - \frac{2}{3} u^3 \sin v - \frac{u^2}{2} \right)_{u=0}^{u=1} dv \\
&= \int_{v=0}^{v=2\pi} \left(-\frac{2}{3} \cos v - \frac{2}{3} \sin v - \frac{1}{2} \right) dv \\
&= \left(-\frac{2}{3} \sin v + \frac{2}{3} \cos v - \frac{v}{2} \right)_{v=0}^{v=2\pi} \\
&= \left(-\frac{2}{3} \sin 2\pi + \frac{2}{3} \cos 2\pi - \frac{2\pi}{2} \right) - \left(-\frac{2}{3} \sin 0 + \frac{2}{3} \cos 0 - \frac{0}{2} \right) \\
&= \left(\frac{2}{3} - \pi \right) - \left(\frac{2}{3} \right) \\
&= -\pi
\end{aligned}$$

❷ 線積分之計算

$$
\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \oint_C (y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k})\bullet d(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\\
&= \oint_C (y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k})\bullet (dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k})\\
&= \oint_C (ydx+zdy+xdz)
\end{aligned}
$$

由圖 2 知，曲線 C 上之任意點，可考慮：

$$x=\cos t \text{ 、 } y=\sin t \text{ 、 } z=0 \text{ ， } 0\le t<2\pi$$

所以

$$
\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \oint_C (ydx+zdy+xdz)\\
&= \int_{t=0}^{t=2\pi} \left[(\sin t)d(\cos t)+(0)d(\sin t)+(\cos t)d(0)\right]\\
&= \int_{t=0}^{t=2\pi} (\sin t)(-\sin tdt)\\
&= -\int_{t=0}^{t=2\pi} \sin^2 tdt\\
&= -\int_{t=0}^{t=2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}tdt\\
&= -\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi}\\
&= \left(-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi}\\
&= \left(-\frac{2\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 4\pi\right)-\left(-\frac{0}{2}+\frac{1}{4}\sin 0\right)\\
&= -\pi
\end{aligned}
$$

由此可知，兩種不同計算方式確實能獲得相同結果，故得證。