提要 253：散度定理(Divergence Theorem)之例證(II)

本單元擬繼續加強讀者在散度定理(Divergence Theorem)這方面的計算能力。

散度定理(Divergence Theorem)

如圖 1 所示，令 T 表封閉之區間(Closed Bounded Region)，而封閉區間 T 的邊界為封閉曲面 S，若流場 $\mathbf{F}$ 及其一階偏導數(First Partial Derivative)在 T 中均為連續函數，則：

$$\iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \oiint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \oiint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA \tag{1}$$

其中 $\mathbf{n}$ 表封閉曲面 S 之向外單位法線向量(Outer Unit Normal Vector)。

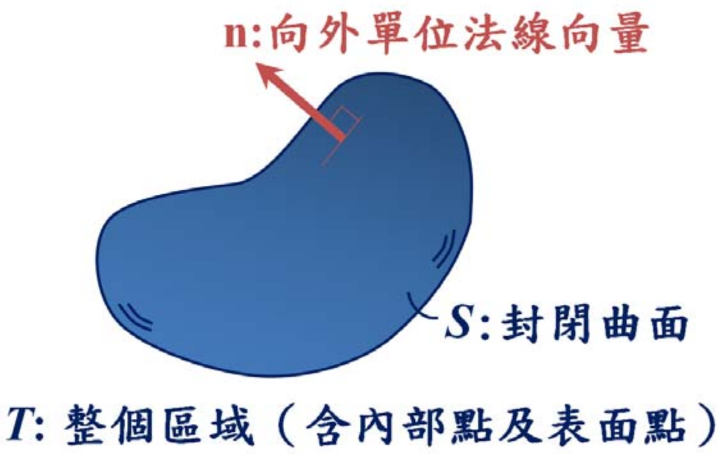

圖 1　封閉區間 T 的邊界為封閉曲面 S

【附註】散度定理欲成立需滿足三個條件：

- 封閉區間 T 的邊界為封閉曲面 S。
- $\mathbf{F}$ 及其一階偏導數在 T 中均為連續函數。
- $\mathbf{n}$ 表封閉曲面 S 之向外單位法線向量。

範例一

已知如圖 2 所示之封閉曲面 S：

$$|x| \le 1、|y| \le 1、|z| \le 1$$

且 $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + z^3\mathbf{k}$ ，試驗證散度定理之面積分與體積分的計算結果是相等的。

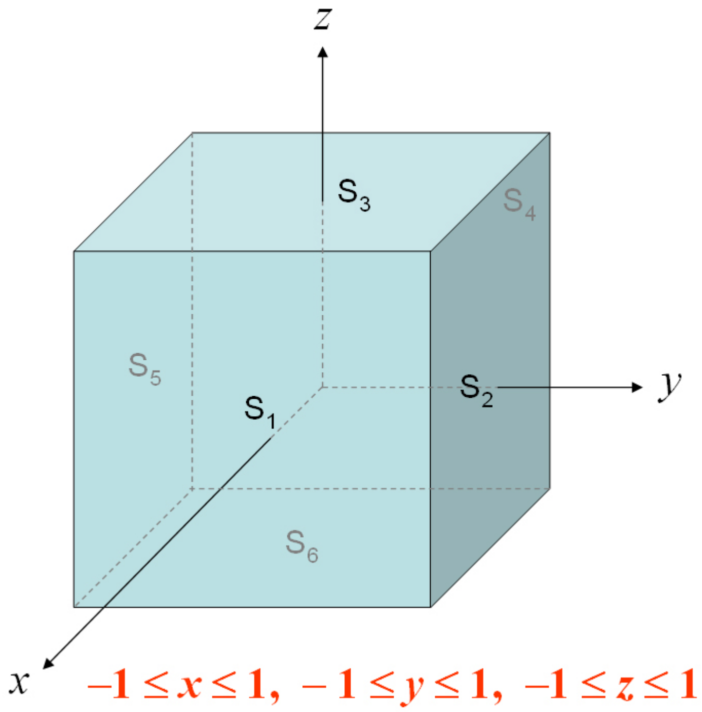

圖 2　封閉曲面 S 之示意圖

解答：

由散度定理知：

$$\iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$$

以下分別計算其體積分與面積分之積分值。

❶ 體積分之計算

$$
\begin{aligned}
\iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV &= \iiint_T \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(x^3\mathbf{i} + z^3\mathbf{k} \right) dV \\
&= \iiint_T \left[\frac{\partial\left(x^3\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(z^3\right)}{\partial z} \right] dV \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(3x^2 + 3z^2\right) dx\,dy\,dz \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(x^3 + 3xz^2\right)_{x=-1}^{x=1} dy\,dz \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\left(1+3z^2\right) - \left(-1-3z^2\right)\right] dy\,dz \\
&= 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(1+3z^2\right) dy\,dz \\
&= 2\int_{-1}^{1} \left[\left(1+3z^2\right)y\right]_{y=-1}^{y=1} dz \\
&= 2\int_{-1}^{1} \left[\left(1+3z^2\right) + \left(1+3z^2\right)\right] dz \\
&= 4\int_{-1}^{1} \left(1+3z^2\right) dz \\
&= 4\left(z + z^3\right)_{z=-1}^{z=1} \\
&= 4\left[\left(1+1\right) - \left(-1-1\right)\right] \\
&= 16
\end{aligned}
$$

❷ 面積分之計算

如以下計算式所示，可利用觀察法直接觀察積分曲面之各種性質。

$$
\begin{aligned}
\oiint_S \mathbf{F}\bullet d\mathbf{A} &= \oiint_S \mathbf{F}\bullet \mathbf{n}dA \\
&= \iint_{S_1}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}dA+\iint_{S_2}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}dA+\iint_{S_3}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}dA+\iint_{S_4}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}dA+\iint_{S_5}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}dA+\iint_{S_6}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}dA \\
&= \iint_{S_1:\,x=1}\left(x^3\mathbf{i}+z^3\mathbf{k}\right)\bullet\mathbf{i}dydz+\iint_{S_2:\,y=1}\left(x^3\mathbf{i}+z^3\mathbf{k}\right)\bullet\mathbf{j}dxdz+\iint_{S_3:\,z=1}\left(x^3\mathbf{i}+z^3\mathbf{k}\right)\bullet\mathbf{k}dxdy \\
&\quad+\iint_{S_4:\,x=-1}\left(x^3\mathbf{i}+z^3\mathbf{k}\right)\bullet\left(-\mathbf{i}dydz\right)+\iint_{S_5:\,y=-1}\left(x^3\mathbf{i}+z^3\mathbf{k}\right)\bullet\left(-\mathbf{j}dxdz\right)+\iint_{S_6:\,z=-1}\left(x^3\mathbf{i}+z^3\mathbf{k}\right)\bullet\left(-\mathbf{k}dxdy\right) \\
&= \iint_{S_1:\,x=1}x^3dydz+\iint_{S_2:\,y=1}(0)dxdz+\iint_{S_3:\,z=1}z^3dxdy+\iint_{S_4:\,x=-1}\left(-x^3\right)dydz+\iint_{S_5:\,y=-1}(0)dxdz+\iint_{S_6:\,z=-1}\left(-z^3\right)dxdy \\
&= \iint_{S_1}(1)dydz+0+\iint_{S_3}(1)dxdy+\iint_{S_4}(1)dydz+0+\iint_{S_6}(1)dxdy \\
&= \left(S_1\text{的面積}\right)+\left(S_3\text{的面積}\right)+\left(S_4\text{的面積}\right)+\left(S_6\text{的面積}\right) \\
&= (2\times 2)+(2\times 2)+(2\times 2)+(2\times 2) \\
&= 16
\end{aligned}
$$

由以上之計算知，兩種方式所計算出之結果確實相同。