提要 252：散度定理(Divergence Theorem)之例證(I)

很多讀者只會散度定理(Divergence Theorem)的體積分那一半，而無法作另一半關於封閉之面積分的計算，故本單元及下一單元擬加強讀者在這方面的能力。

散度定理(Divergence Theorem)

如圖 1 所示，令 T 表封閉之區間(Closed Bounded Region)，而封閉區間 T 的邊界為封閉曲面 S，若流場 $\mathbf{F}$ 及其一階偏導數(First Partial Derivative)在 T 中均為連續函數，則：

$$\iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA \tag{1}$$

其中 $\mathbf{n}$ 表封閉曲面 S 之向外單位法線向量(Outer Unit Normal Vector)。

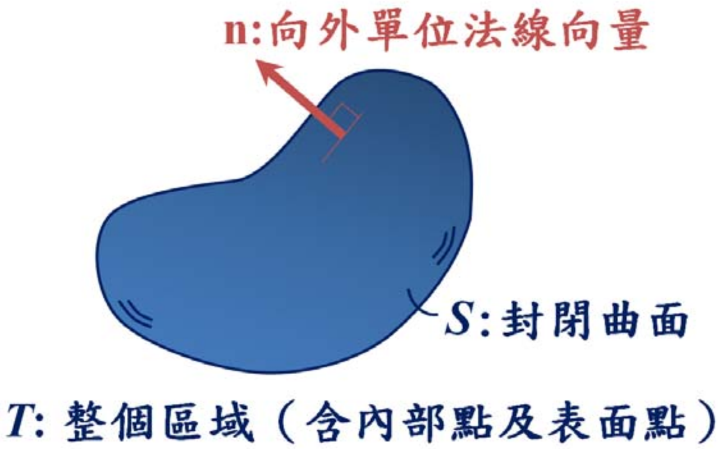

圖 1　封閉區間 T 的邊界為封閉曲面 S

【附註】散度定理欲成立需滿足三個條件：

- 封閉區間 T 的邊界為封閉曲面 S。
- $\mathbf{F}$ 及其一階偏導數在 T 中均為連續函數。
- $\mathbf{n}$ 表封閉曲面 S 之向外單位法線向量。

範例一

已知如圖 2 所示之封閉曲面 S：

$$0 \le x \le 3、0 \le y \le 2、0 \le z \le 1$$

且 $\mathbf{F} = e^{y}\mathbf{j}$，試驗證散度定理之面積分與體積分的計算結果是相等的。

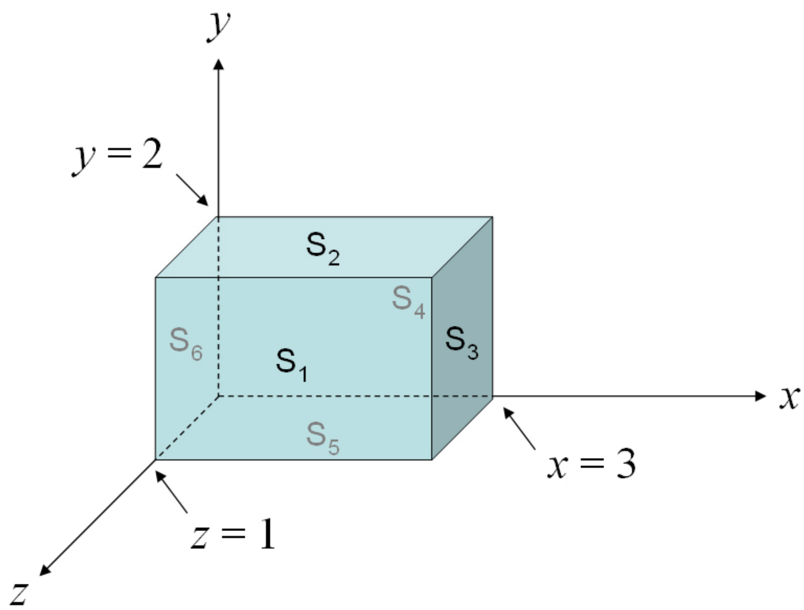

圖 2　封閉曲面 S 之示意圖

解答：

由散度定理知：

$$\iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$$

以下分別計算其體積分與面積分之積分值。

❶ 體積分之計算

$$
\begin{aligned}
\iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV &= \iiint_T \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(e^y \mathbf{j} \right) dV \\
&= \iiint_T \frac{\partial \left(e^y \right)}{\partial y} dV \\
&= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 e^y\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^1 \int_0^2 \left(x e^y \right)_{x=0}^{x=3} dy\,dz \\
&= \int_0^1 \int_0^2 3e^y\,dy\,dz \\
&= \int_0^1 \left(3e^y \right)_{y=0}^{y=2} dz \\
&= \int_0^1 \left(3e^2 - 3e^0 \right) dz \\
&= \int_0^1 3\left(e^2 - 1 \right) dz \\
&= \left[3\left(e^2 - 1 \right) z \right]_{z=0}^{z=1} \\
&= 3\left(e^2 - 1 \right)
\end{aligned}
$$

❷ 面積分之計算

如以下計算式所示，可利用觀察法直接觀察積分曲面之各種性質。

$$
\begin{aligned}
\oiint_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{A} &= \oiint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dA \\
&= \iint_{S_1} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dA + \iint_{S_2} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dA + \iint_{S_3} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dA + \iint_{S_4} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dA + \iint_{S_5} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dA + \iint_{S_6} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dA \\
&= \iint_{S_1:\, z=1} (e^y \mathbf{j}) \bullet \mathbf{k} dxdy + \iint_{S_2:\, y=2} (e^y \mathbf{j}) \bullet \mathbf{j} dxdz + \iint_{S_3:\, x=3} (e^y \mathbf{j}) \bullet \mathbf{i} dydz \\
&+ \iint_{S_4:\, z=0} (e^y \mathbf{j}) \bullet (-\mathbf{k} dxdy) + \iint_{S_5:\, y=0} (e^y \mathbf{j}) \bullet (-\mathbf{j} dxdz) + \iint_{S_6:\, x=0} (e^y \mathbf{j}) \bullet (-\mathbf{i} dydz) \\
&= \iint_{S_1:\, z=1} 0 dxdy + \iint_{S_2:\, y=2} e^y dxdz + \iint_{S_3:\, x=3} 0 dydz + \iint_{S_4:\, z=0} 0 dxdy + \iint_{S_5:\, y=0} (-e^y) dxdz + \iint_{S_6:\, x=0} 0 dydz \\
&= 0 + \iint_{S_2} e^2 dxdz + 0 + 0 + \iint_{S_5} (-e^0) dxdz + 0 \\
&= e^2 \iint_{S_2} dxdz - \iint_{S_5} dxdz \\
&= e^2 (S_2\text{的面積}) - (S_5\text{的面積}) \\
&= e^2 (1 \times 3) - (1 \times 3) \\
&= 3(e^2 - 1)
\end{aligned}
$$

由以上之計算知，兩種方式所計算出之結果確實相同。