# 提要 251：第一個重要的向量定理--散度定理(Divergence Theorem)

散度定理(Divergence Theorem)與史托克定理(Stokes' Theorem)為向量中之兩大重要定理，之前所介紹的格林定理(Green's Theorem)係史托克定理之特殊情況，散度定理亦常被稱之為高斯定理(Gauss Theorem)，這兩大定理請讀者務必弄懂它。散度定理是用以計算通過封閉曲面之流量(Flux)用的，可運用散度定理將體積分轉換為封閉曲面之面積分。

### 散度定理(Divergence Theorem)

如圖 1 所示，令 $T$ 表封閉之區間(Closed Bounded Region)，而封閉區間 $T$ 的邊界為封閉曲面 $S$，若流場 $\mathbf{F}$ 及其一階偏導數(First Partial Derivative)在 $T$ 中均為連續函數，則：

$$\iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA \tag{1}$$

其中 $\mathbf{n}$ 表封閉曲面 $S$ 之向外單位法線向量(Outer Unit Normal Vector)。

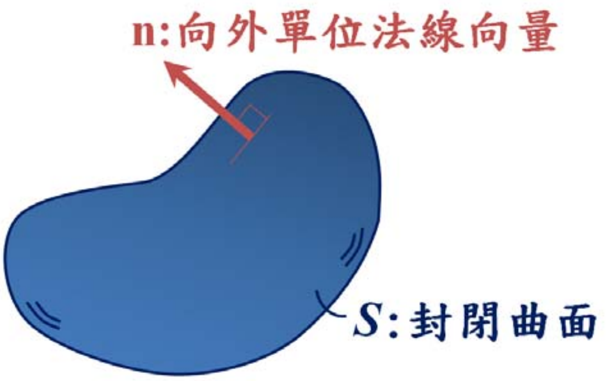


圖 1　封閉區間 $T$ 的邊界為封閉曲面 $S$

【附註】散度定理欲成立需滿足三個條件：

- 封閉區間 $T$ 的邊界為封閉曲面 $S$。
- $\mathbf{F}$ 及其一階偏導數在 $T$ 中均為連續函數。
- $\mathbf{n}$ 表封閉曲面 $S$ 之向外單位法線向量。

範例一

已知如圖 2 所示半徑為 $a$ 高度為 $b$ 之封閉圓柱曲面 $S$ 可表為：

$$x^2+y^2=a^2 \text{、} 0\le z\le b$$

試求封閉之面積分 $I=\oiint_S \left(x^3dydz+x^2ydxdz+x^2zdxdy\right)$ 之積分值。

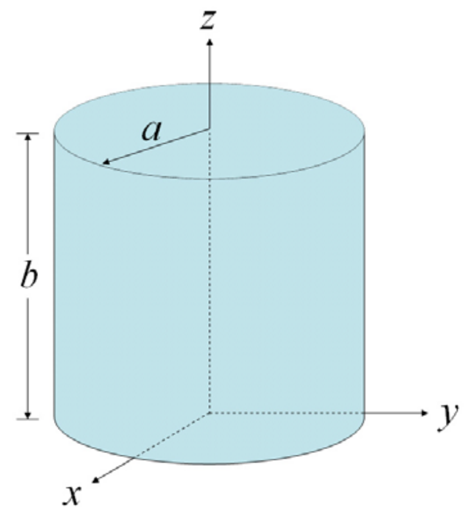


圖 2　圓球曲面示意圖

解答：

由散度定理知：

$$\oiint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$$

其中

$$\oiint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\oiint_S \left(F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}\right)\cdot\left(dydz\,\mathbf{i}+dxdz\,\mathbf{j}+dxdy\,\mathbf{k}\right)$$
$$=\oiint_S \left(F_1dydz+F_2dxdz+F_3dxdy\right)$$

上式對照題意所給積分式可知：

$$\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}+x^2z\mathbf{k}$$

因問題滿足散度定理的三個條件，故可引用散度定理推求封閉曲面之面積分值，亦即：

$$
\begin{aligned}
\oiint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} &= \iiint_T \nabla\cdot\left(x^3\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}+x^2z\mathbf{k}\right)dV \\
&= \iiint_T \left[\frac{\partial\left(x^3\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(x^2y\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(x^2z\right)}{\partial z}\right]dV \\
&= \iiint_T \left(3x^2+x^2+x^2\right)dV \\
&= \iiint_T \left(5x^2\right)dV
\end{aligned}
$$

上式在$(x,y,z)$卡氏座標系統(Cartesian Coordinate)中作積分較為困難，最好能改為$(r,\theta,z)$圓柱座標系統(Cylindrical Coordinate)中作積分會較為簡單，故需令：

$$x=r\cos\theta \text{ 、 } y=r\sin\theta \text{ 、 } z=z \text{ 、 } 0\le r\le a \text{ 、 } 0\le\theta\le 2\pi \text{ 、 } 0\le z\le b$$

基於此，$dV=rdrd\theta dz$ ，且體積分可調整為：

$$
\begin{aligned}
\oiint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} &= \iiint_T \left(5x^2\right)dV \\
&= \int_0^b\int_0^{2\pi}\int_0^a 5r^2\cos^2\theta\, rdr\, d\theta\, dz \\
&= \int_0^b\int_0^{2\pi}\int_0^a 5r^3\cos^2\theta\, dr\, d\theta\, dz \\
&= \frac{5a^4}{4}\int_0^b\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\, dz \\
&= \frac{5a^4}{4}\int_0^b\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right)_0^{2\pi} dz \\
&= \frac{5\pi a^4}{4}\int_0^b dz \\
&= \frac{5}{4}\pi a^4 b
\end{aligned}
$$

亦即 $I=\oiint_S\left(x^3dydz+x^2ydxdz+x^2zdxdy\right)=\dfrac{5}{4}\pi a^4 b$ 。