提要 250：通過曲面上特定點 P 之切平面

讀者需先瞭解平面的表示法 $a_1x+a_2y+a_3z=d$，以及推求垂直於曲面之單位向量 $\mathbf{n}$ 的方法，才能對本單元所欲介紹之主題有清楚的認識。

通過曲面上特定點 P 之切平面

如圖 1 所示，若曲面 S 可以位置向量 $\mathbf{r}(u,v)$ 或純量函數 $f(x,y,z)=C$ 加以表示，則曲面 S 上通過 P 點之單位垂直向量 $\mathbf{n}$ 可表為：

$$\mathbf{n}=\frac{\dfrac{\partial\mathbf{r}(P)}{\partial u}\times\dfrac{\partial\mathbf{r}(P)}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial\mathbf{r}(P)}{\partial u}\times\dfrac{\partial\mathbf{r}(P)}{\partial v}\right|} \quad \text{或} \quad \mathbf{n}=\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|} \tag{1}$$

再引用平面表示法的觀念即可建立出曲面 S 上通過 P 點之切平面。已知平面的表示法為 $a_1x+a_2y+a_3z=d$，若其中之 $[a_1,a_2,a_3]$ 表垂直於平面之單位向量，則 d 是平面至座標原點之距離。

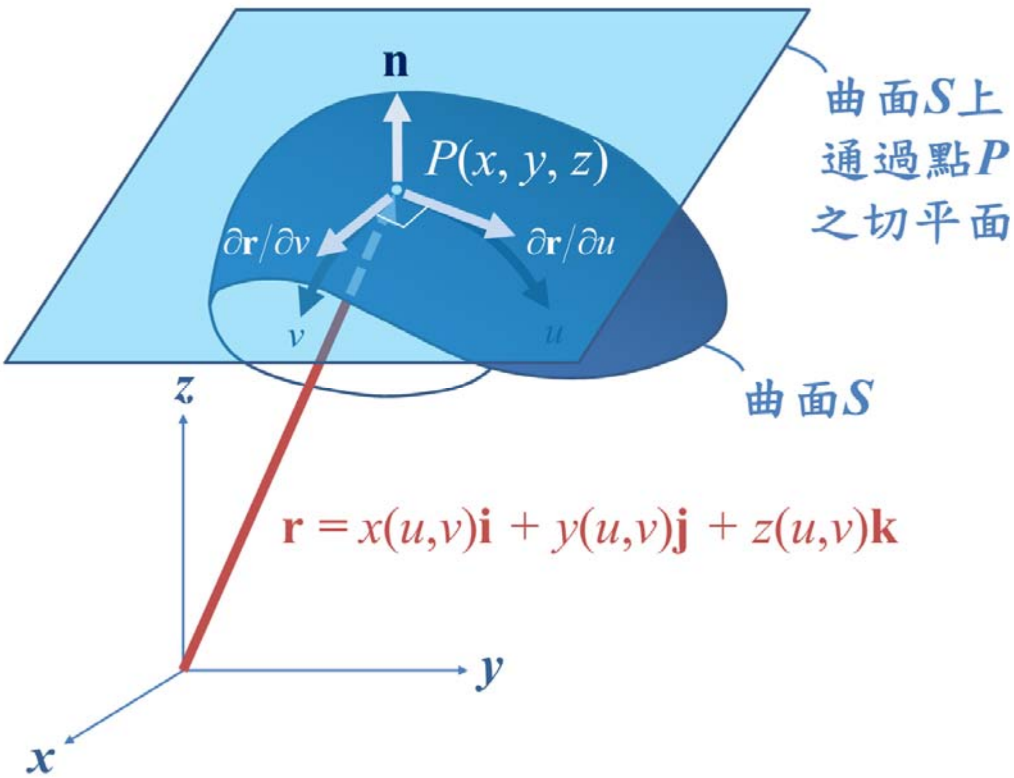


圖 1　在曲面 S 上通過點 P 之切平面示意圖

範例一

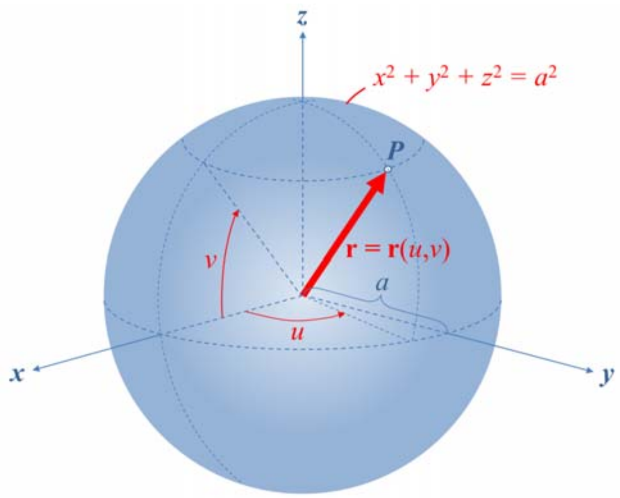
已知如圖 2 所示半徑為 a 之圓球曲面 S 可表為：

$$\mathbf{r}(u,v) = a\cos u\cos v\mathbf{i} + a\sin u\cos v\mathbf{j} + a\sin v\mathbf{k} \text{ 、 } 0 \le u \le 2\pi \text{ 、 } -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$$

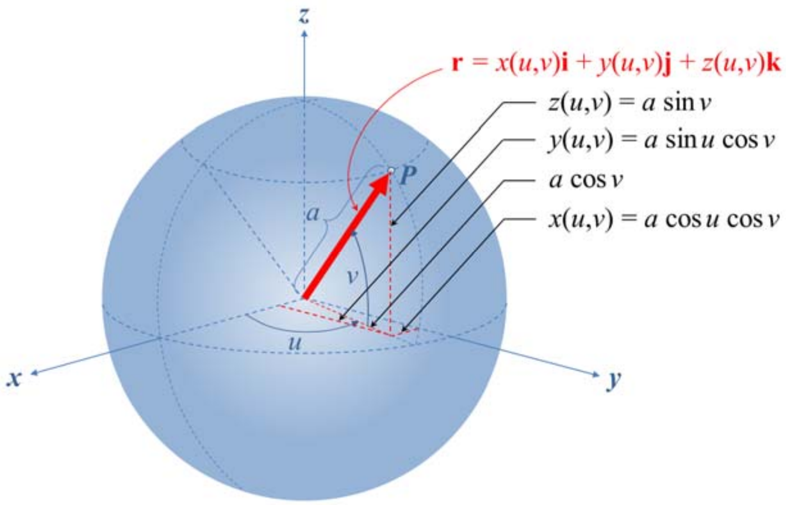
或

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

試求圓球曲面之單位垂直向量 $\mathbf{n}$。



(a)



(b)

圖 2　圓球曲面示意圖

解答：

由之前的討論知，曲面 S 上之單位垂直向量 $\mathbf{n}$ 可表為：

$$\mathbf{n}=\frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}\quad \text{或}\quad \mathbf{n}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

故：

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}&=\frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}\\
&=\frac{\dfrac{\partial(a\cos u\cos v\mathbf{i}+a\sin u\cos v\mathbf{j}+a\sin v\mathbf{k})}{\partial u}\times\dfrac{\partial(a\cos u\cos v\mathbf{i}+a\sin u\cos v\mathbf{j}+a\sin v\mathbf{k})}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial(a\cos u\cos v\mathbf{i}+a\sin u\cos v\mathbf{j}+a\sin v\mathbf{k})}{\partial u}\times\dfrac{\partial(a\cos u\cos v\mathbf{i}+a\sin u\cos v\mathbf{j}+a\sin v\mathbf{k})}{\partial v}\right|}\\
&=\frac{(-a\sin u\cos v\mathbf{i}+a\cos u\cos v\mathbf{j})\times(-a\cos u\sin v\mathbf{i}-a\sin u\sin v\mathbf{j}+a\cos v\mathbf{k})}{|(-a\sin u\cos v\mathbf{i}+a\cos u\cos v\mathbf{j})\times(-a\cos u\sin v\mathbf{i}-a\sin u\sin v\mathbf{j}+a\cos v\mathbf{k})|}\\
&=\cos u\sin v\mathbf{i}+\sin u\sin v\mathbf{j}+\cos v\mathbf{k}
\end{aligned}$$

另一種計算方式為：

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}&=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\\
&=\frac{\nabla(x^2+y^2+z^2)}{|\nabla(x^2+y^2+z^2)|}\\
&=\frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{|2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}|}\\
&=\frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\
&=\frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{2a}\\
&=\frac{x}{a}\mathbf{i}+\frac{y}{a}\mathbf{j}+\frac{z}{a}\mathbf{k}
\end{aligned}$$

以上兩種方式所得出之單位垂直向量 $\mathbf{n}$ 實際上是同一個。