提要 248：曲面之面積分

之前所曾提及之面積分，是純量函數 $f(x,y)$ 之面積分，今擬將面積分的概念推廣至向量函數 $\mathbf{r}(u,v)$ 之面積分，說明如下。

曲面之面積分

已知任意曲面 S 均可以兩個變數 u、v 所示之位置向量 $\mathbf{r}(u,v)$ 加以表示，今欲推求一流場 $\mathbf{F}$ 通過曲面 $\mathbf{r}(u,v)$ 之流量(Flux)，則其計算方式為：

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} \tag{1}$$

其流量之計算係指通過曲面 $\mathbf{r}(u,v)$ 之流場 $\mathbf{F}$，故 $\mathbf{F}=\mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)]$；另外，$d\mathbf{A}$ 是指如圖 1 所示曲面 $\mathbf{r}(u,v)$ 上之微小面積。

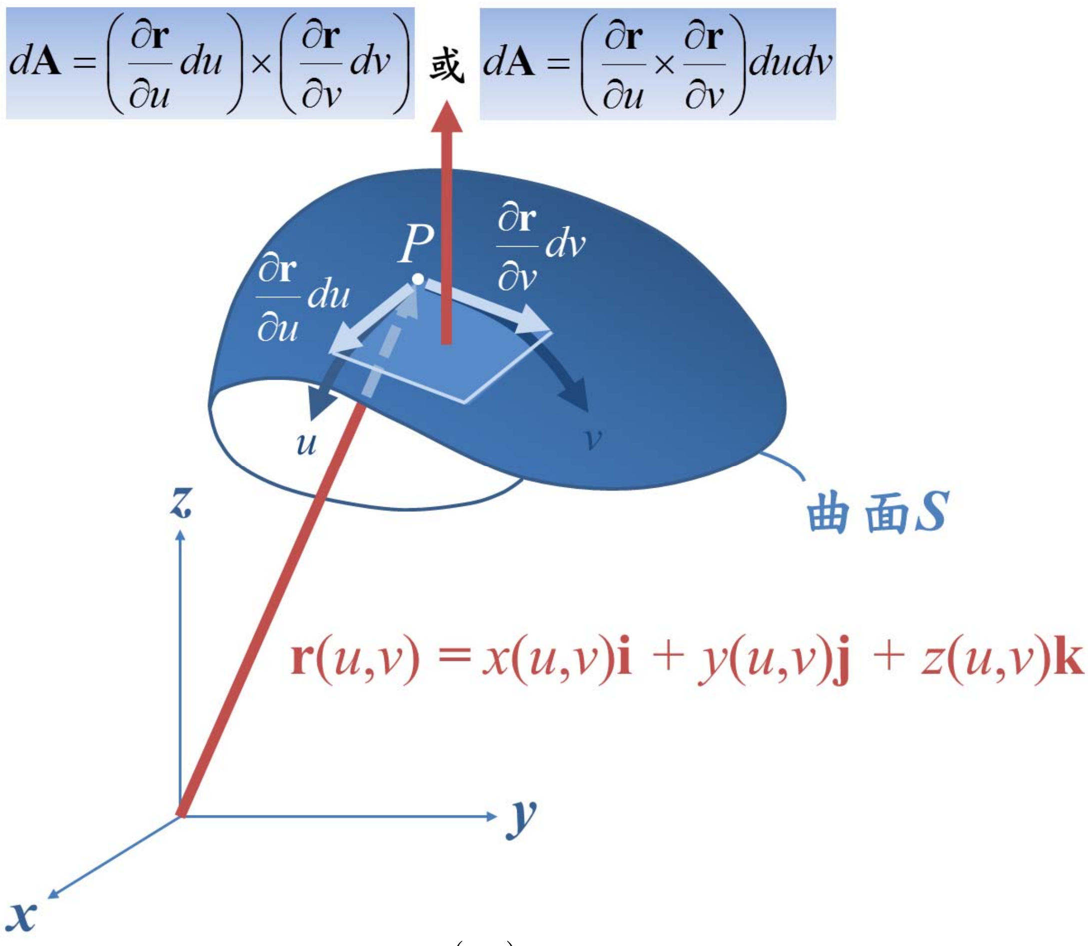

圖 1　在 S 曲面 $\mathbf{r}(u,v)$ 上取微小面積元素示意圖

【附註】

面積分有許多種型態，整理如下：

- 因為微小面積 $d\mathbf{A}=\left(\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)dudv$ ，所以 $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\iint_S \mathbf{F}\cdot\left(\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)dudv$ 。

- 因為微小面積 $d\mathbf{A}=\mathbf{n}dA$ ，$\mathbf{n}$ 表微小面積向量 $d\mathbf{A}$ 之單位法線向量，dA 表微小面積向量 $d\mathbf{A}$ 之大小，所以 $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dA$ 。

- 因為 $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ 、 $d\mathbf{A}=dydz\mathbf{i}+dxdz\mathbf{j}+dxdy\mathbf{k}$ ，所以 $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\iint_S \left(F_1dydz+F_2dxdz+F_3dxdy\right)$ 。

- 因為 $\mathbf{n}=\dfrac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}$ ，所以 $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\iint_S \mathbf{F}\cdot\dfrac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}dA$ 。

範例一

已知流場$\mathbf{F}=y\mathbf{i}+2\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$（單位：$m/s$），曲面$S$(單位：$m^2$)為$y=x^2$、$0\le x\le 2$、$0\le z\le 3$，如圖 2 所示，試求通過曲面$S$之流量$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$。

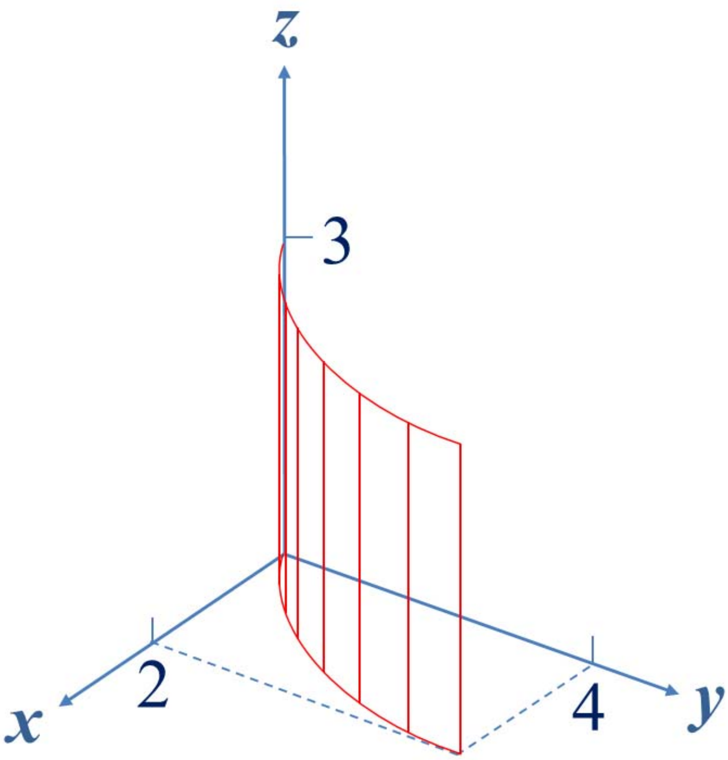

圖 2　曲面S：$y=x^2$、$0\le x\le 2$、$0\le z\le 3$示意圖

解答：

作者最喜歡引用面積分之關係式為：

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}=\iint_S \mathbf{F}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)dudv \tag{2}$$

已知曲面S為$y=x^2$、$0\le x\le 2$、$0\le z\le 3$，擬將其以位置向量$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$加以表示。可令：

$$x=u \text{ 、 } y=u^2 \text{ 、 } z=v \text{ 、 } 0\le u\le 2 \text{ 、 } 0\le v\le 3 \tag{3}$$

亦即曲面S可表為：

$$\mathbf{r}(u,v)=u\mathbf{i}+u^2\mathbf{j}+v\mathbf{k} \tag{4}$$

因流場$\mathbf{F}$係只通過曲面S之向量場，即$\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r})$，故可根據式(3)將流場$\mathbf{F}$加以改寫：

$$\mathbf{F}=u^2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+uv\mathbf{k} \tag{5}$$

故式(2)可調整為：

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} &= \iint_S \mathbf{F}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)dudv \\
&= \int_0^3\int_0^2 \left(u^2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+uv\mathbf{k}\right)\cdot\left[\frac{\partial\left(u\mathbf{i}+u^2\mathbf{j}+v\mathbf{k}\right)}{\partial u}\times\frac{\partial\left(u\mathbf{i}+u^2\mathbf{j}+v\mathbf{k}\right)}{\partial v}\right]dudv \\
&= \int_0^3\int_0^2 \left(u^2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+uv\mathbf{k}\right)\cdot\left[(\mathbf{i}+2u\mathbf{j})\times(\mathbf{k})\right]dudv \\
&= \int_0^3\int_0^2 \left(u^2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+uv\mathbf{k}\right)\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}dudv \\
&= \int_0^3\int_0^2 \left(u^2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+uv\mathbf{k}\right)\cdot(2u\mathbf{i}-\mathbf{j})dudv \\
&= \int_0^3\int_0^2 \left(2u^3-2\right)dudv \\
&= \int_0^3 \left(\frac{1}{2}u^4-2u\right)\Big|_0^2 dv \\
&= \int_0^3 (8-4)dv \\
&= \int_0^3 4dv \\
&= 4v\Big|_0^3 \\
&= 12
\end{aligned}$$

其單位是m^3/s。