提要 247：格林定理(Green’s Theorem)與邊界元素法

由前幾個單元之研討知，利用格林定理(Green’s Theorem)可將面積分的問題化簡為線積分的問題，亦即可將減少一次的積分。有一種數值分析方法，稱為「邊界元素法(Boundary Elementary Method，BEM)」，即是引用此一基本觀念發展出來的，它在工程問題之數值計算過程中，已扮演著極重要之角色，說明如下。

以格林定理(Green’s Theorem)推求邊界元素法之基本公式

我們可利用格林定理推求邊界元素法之基本公式如下：

$$\iint_R \nabla^2 w dxdy = \oint_C \frac{\partial w}{\partial n} ds \tag{1}$$

其中 s 為邊界曲線之弧長變數；n 為與邊界相互垂直之變數；C 為 R 之邊界。

【證明】

已知格林定理為 $\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C \left(F_1 dx + F_2 dy\right)$，若令 $F_1 = -\frac{\partial w}{\partial y}$ 、 $F_2 = \frac{\partial w}{\partial x}$ ，則格林定理可改寫為：

$$\begin{aligned}
\iint_R \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) dxdy &= \oint_C \left(-\frac{\partial w}{\partial y} dx + \frac{\partial w}{\partial x} dy\right) \\
&= \oint_C \left(-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dy}{ds}\right) ds \\
&= \oint_C \left(\frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right) ds \\
&= \oint_C \nabla w \cdot \mathbf{n}\, ds \\
&= \oint_C \left(\frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathbf{j}\right) \cdot \left(n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j}\right) ds \\
&= \oint_C \left(\frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y\right) ds \\
&= \oint_C \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) ds \\
&= \oint_C \frac{\partial w}{\partial n} ds
\end{aligned}$$

故得證。