提要 246：格林定理(Green’s Theorem)與面積儀的原理

我們可以利用格林定理(Green’s Theorem)推求面積大小，這也是面積儀的原理，說明如下。

利用格林定理推求面積大小
可利用格林定理推求面積 A 之大小，其積分公式如下： $$A=\frac{1}{2}\oint_C(xdy-ydx) \qquad (1)$$

【證明】

已知格林定理為 $\iint_R\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy=\oint_C(F_1dx+F_2dy)$，

❶ 若令 $F_1=0$ 、 $F_2=x$ ，則：

$$\iint_R dxdy=\oint_C xdy \tag{2}$$

❷ 若令 $F_1=-y$ 、 $F_2=0$ ，則：

$$\iint_R dxdy=-\oint_C ydx \tag{3}$$

其中積分區間 R 之面積即為 A，亦即 $A=\iint_R dxdy$ 。式(2)與式(3)相加除以 2 可得：

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\oint_C(xdy-ydx)} \tag{4}$$

故得證。

範例一

試求如圖 1 所示橢圓曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所圍繞之面積。

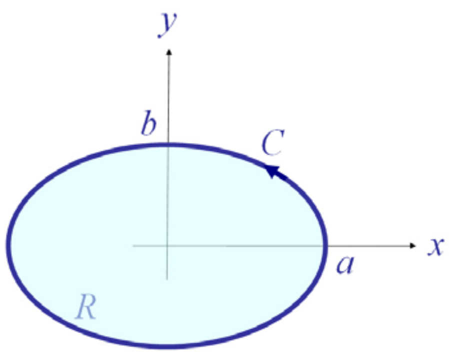

圖 1　橢圓之示意圖

解答：

由式(1)知：

$$A=\frac{1}{2}\oint_C (xdy-ydx) \qquad (1)$$

可以用一個參數 t 描述橢圓曲線 C，亦即可令：

$$x=a\cos t \text{ 、 } y=b\sin t \text{ 、 } 0\le t<2\pi \qquad (5)$$

故式(1)可加以改寫並求出橢圓所圍繞之面積 A 如下：

$$\begin{aligned}
A&=\frac{1}{2}\oint_C (xdy-ydx)\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t)d(b\sin t)-(b\sin t)d(a\cos t)]\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t)(b\cos tdt)-(b\sin t)(-a\sin tdt)]\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[ab\cos^2 t+ab\sin^2 t\right]dt\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}abdt\\
&=\pi ab
\end{aligned}$$